中职数学练习册

主编　覃志奎　龙海清　覃艳肖

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是中等职业教育课程“数学”辅导练习册，在编写中，充分考虑中职学生的数学基础与解析能力，分为初中知识回顾、中职数学练习、综合模拟练习等三篇。

初中知识回顾篇，重拾初中关联知识，起到承上启下的作用。中职数学练习按章节编写，每节内容包括知识回顾、典例分析、能力检测三个模块。其中，知识回顾设计为填空形式，帮助学生提炼重点和难点知识；典例分析通过精心选题，讲解深入浅出，为学生归纳总结解题方法，可供教师课堂补充或学生自学；能力检测设有基础闯关、能力提升、拓展训练三个层次的练习题，学生可以分层选用，对每节内容进行巩固和提升。第一篇第 2 章和第二篇各章后编有测试题供学生巩固练习；综合模拟题可作为升学练习使用。

本练习册可作为中等职业学校《数学》教学辅导教材，也可作为中职教师、学生及数学爱好者学习参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

中职数学练习册 / 覃志奎，龙海清，覃艳肖主编. —北京：电子工业出版社，2017.8

ISBN 978-7-121-32253-2

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①覃… ②龙… ③覃… Ⅲ. ①数学课－中等专业学校－习题集 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 171232 号

策划编辑：祁玉芹

责任编辑：张瑞喜

印　　刷：中国电影出版社印刷厂

装　　订：中国电影出版社印刷厂

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编:100036

开　　本：787×1092　1/16　印张：11.25　字数：274 千字

版　　次：2017 年 8 月第 1 版

印　　次：2017 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：25.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系，联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：lilye@hpei.com.cn。

前　　言

“数学”是中等职业学校学生必修的一门文化基础课，目前各中职学校使用的“数学”教材大同小异，内容上基本一致，都是突出了基础性、职业性、普及性、实用性等特点。本书参照《中等职业学校数学教学大纲》编写，针对中职学校学生特点，通过知识回顾、典例分析、能力检测等三个模块的渐进式练习提升学生对数学概念和知识的理解和掌握，从而提高学生的数学解析能力。

本书具有以下特点：

1．注重基本知识的掌握。设计基础知识回顾环节，以帮助学生提炼知识内容，强化数学基本概念和重点知识的掌握。

2．突出基础能力的提升。通过典型例题分析和基础闯关练习，让学生更好地运用知识解决问题，提高对数学知识的运用能力。

3．强化数学知识的拓展。在练习中，强化数学知识的实际应用，突出数学在现实中的应用练习，进一步拓展学生的思维能力。

4．兼顾升学发展的需要。本书兼顾了中职学生未来升学需要，提供了更多的能力训练，为学生将来学习数学打下扎实的基础。

全书共分为初中知识回顾、中职数学练习、综合模拟练习等三篇内容。以第二篇内容为重点，根据数学大纲要求共分为十章，每章内容自成一体，以方便老师上课同步使用，所有练习全部为一线教师在长期教学过程中的经验积累。

本书由广西河池市职业教育中心学校从事一线数学教学及研究的教师集体编写。由覃志奎、龙海清、覃艳肖任主编，黄另竹、奉永文、覃月才、梁蓉蓉、唐雯丽任副主编，编委有覃安周、苏红杏、陈代跃、李永生、韦锦春、兰晓华。初中知识回顾由黄另竹撰写；集合由梁蓉蓉撰写；不等式由覃志奎撰写；函数由覃艳肖撰写；指数函数与对数函数由覃志奎、龙海清、覃艳肖、黄另竹、奉永文、覃月才撰写；三角函数由苏红杏撰写；数列由覃月才撰写；平面向量由唐雯丽撰写；直线和圆由龙海清、覃安周撰写；立体几何由奉永文撰写；概率与统计初步由陈代跃撰写；综合模拟题由全体参编人员共同完成；李永生、韦锦春、兰晓华负责数学符号、图形录入。统稿由覃志奎、龙海清负责。

由于编者水平有限，书中难免有错漏之处，敬请同行专家和读者批评指正。

编　者

2017 年 8 月

目　　录

第一篇　初中知识回顾

第二篇　中职数学练习

第三篇　综合模拟题

第一篇　初中知识回顾

第1章　基本概念与基本公式

【知识回顾】

一、基本概念

1．相反数：大小_______符号_______的两个数互为相反数。

2．倒数：乘积等于________的两个数互为倒数。

3．绝对值：数轴上表示实数 a 的点与______的距离叫做实数 a 的绝对值，用____表示。

4．平方根：如果一个数的________等于实数 a，那么这个数叫做 a 的平方根，用 $\pm\sqrt{a}$ 表示，其中 $\sqrt{a}$ 叫做 a 的____________________。

5．立方根：如果一个数的________等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根，用 $\sqrt[3]{a}$ 表示。

二、基本公式

1．绝对值公式：$\sqrt{a^2}=|a|=$__________________。

2．平方差公式：$(a+b)(a-b)=$________________。

3．完全平方公式：$(a\pm b)^2=$__________________。

4．整数指数幂的运算公式：

① $a^m\cdot a^n=$____　② $\dfrac{a^m}{a^n}=$_____　③ $(a^m)^n=$_______　④ $(a\cdot b)^n=$__________

⑤ $(\dfrac{a}{b})^n=$______　⑥ $a^{-n}=$________　⑦ $a^0(a\neq 0)=$______　⑧ $(\sqrt{a})^2(a\geqslant 0)=$______

【典例分析】

例1．计算下列各式的值：

(1) $\left|-\dfrac{1}{2}\right|+2^{-1}-2^2+2013^0$　　(2) $\left[(-a)^4\cdot(-a^2)^3\right]\div a^{10}$

(3) $(\dfrac{2}{3}ab^2-2ab)\cdot\dfrac{1}{2}ab$　　(4) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

解：(1) $\left|-\dfrac{1}{2}\right|+2^{-1}-2^2+2013^0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^1}-4+1$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-4+1$

$=-2$

(2) $\left[(-a)^4\cdot(-a^2)^3\right]\div a^{10}=\left[a^4\cdot(-a^6)\right]\div a^{10}$

$=-a^{10}\div a^{10}$

$=-1$

(3) $(\frac{2}{3}ab^2-2ab)\cdot\frac{1}{2}ab=\frac{2}{3}ab^2\cdot\frac{1}{2}ab+(-2ab)\cdot\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^2$

(4) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3$

$=x^3+y^3$

例 2．当$a>2$时，求$\sqrt{(2-a)^2}$ 的值。

解：$\because a>2\therefore 2-a<0$

$\therefore\sqrt{(2-a)^2}=|2-a|=-(2-a)=a-2$

说明：本题利用了公式$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a,当a\geqslant 0时,\\-a,当a<0时\end{cases}$

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．绝对值等于 9 的数是(　　)。

A．9　　B．-9　　C．± 9　　D．以上答案均错

2．若a、b互为倒数，则$\frac{4}{5}ab$的值为(　　)。

A．$\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\frac{5}{4}$　　D．$-\frac{5}{4}$

3．若$|a|=a$，则a一定是（　　）。

A．正数　　B．负数　　C．非正数　　D．非负数

4．$2a^2b\cdot(-3ab^2)^3\cdot ab$的值为(　　)。

A．$-54a^6b^8$　　B．$54a^6b^8$　　C．$-27a^6b^8$　　D．$27a^6b^8$

5．$(x-2)(3x-1)$=(　　)。

A．$3x^2+7x+2$　　B．$3x^2-7x+2$　　C．$3x^2-7x-2$　　D．$3x^2+7x-2$

二、填空题

1．$(2\sqrt{3})^2=$ ______________；$3\sqrt{27}(-3\sqrt{3})=$ ______________。

2．$(x+2)(x^2+4)(x-2)=$______________。

3．$-\frac{3}{2}$的相反数是______________，倒数是______________。

4．$\sqrt{\frac{3y}{x}}\cdot\sqrt{\frac{3x^2}{y}}=$______________。

5．81 的平方根是__________，算术平方根是____________，立方根是____________。

三、解答题

1．当x为何值时，分式$\frac{x-3}{x^2-x}$的值为 0？当x为何值时，分式$\frac{x-3}{x^2-x}$有意义？

2．将下列式子进行分解因式：

(1) $a^2+12a+36$　　(2) $4x^2-4x+1$

3．计算下列各式的值：

(1) $4x^2y\cdot(-xy^2)^3$　　(2) $(4a-b^2)\cdot(-2b)$　　(3) $(3x+2)\cdot(x+2)$

能力提升

一、选择题

1．化简分式 $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$ 的结果为(　　)。

A．$-1+\sqrt{2}$　　B．$-1-\sqrt{2}$　　C．$1-\sqrt{2}$　　D．$1+\sqrt{2}$

2．绝对值小于 4.3 的整数个数有(　　)个。

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

3．$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$的值为(　　)。

A．$\sqrt{2}-1$　　B．$\sqrt{2}+1$　　C．$1-\sqrt{2}$　　D．$-1-\sqrt{2}$

4．$\sqrt{81}$ 的平方根是(　　)。

A．±9　　B．9　　C．±3　　D．3

二、填空题

1．因式分解：$x^2+x-6=$______________。

2．已知$4y^2+my+9$是完全平方式，则m 的值为______________。

3．当 $m>1$ 时，$|1-m|-(m-3)$的值为______________。

三、解答题

1．分解下列因式：

(1) $(a-b)^2+4ab$　　(2) $3ax^2-3ay^2$　　(3) $y^2+y+\dfrac{1}{4}$　　(4) $m^2-14m+49$

2．求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$　　(2) $2x\cdot(\dfrac{1}{2}x^2-1)-3x\cdot(\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3})$

拓展训练

1．若 $2^m=a,32^n=b$，求 2^{3m+10n} 的值。

2．已知 $a+\dfrac{1}{a}=3,$求 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 的值。

3．当 $a=3$时，求代数式 $\dfrac{a^2-4}{a+2}\cdot(1+\dfrac{1}{a-2})$ 的值。

第 2 章　方程与方程组

【知识回顾】

1．中学学过的方程有_________、_________；学过的方程组有_________、___________。

2. 解一元一次方程的一般步骤是_________、_________、_________、_________、_________。

3．一元二次方程的标准形式是_______________；其判别式 Δ=_______________；其求根公式是________________________________；当判别式 Δ＞0 时，方程有_______个不相等的实数根；当判别式 Δ＝0 时，方程有______个实根；当判别式 Δ＜0 时，方程______ 实数根。

4．解一元二次方程的主要方法有____________、__________、__________。

5．解二元一次方程组的方法有___________、_________________。

【典例分析】

例 1．解方程 (1) $\frac{1}{3}(2x-1)-\frac{1}{2}(3x+3)=x$　(2) $3x-7(x-1)=3-2(x+3)$

解：(1) 去分母(方程两边乘以 6)，得

$2(2x-1)-3(3x+3)=6x$

去括号,得　$4x-2-9x-9=6x$

移项，得　$4x-9x-6x=9+2$

合并同类项，得　$-11x=11$

系数化为 1，得 $x=-1$

(2) 去括号，得 $3x-7x+7=3-2x-6$

移项，得　$3x-7x+2x=3-6-7$

合并同类项，得　$-2x=-10$

系数化为 1，得　$x=5$

说明：有些一元一次方程的解题步骤不一定都包含有上述五个步骤，如(2)。

例 2．解下列一元二次方程：　$3x^2-6x=2x^2-8$。

解：移项，合并同类项得　$x^2-6x+8=0$ ①

方法一(用配方法)：

将方程①移项得　$x^2-6x=-8$，

配方，　$x^2-6x+(-3)^2=-8+(-3)^2$　即 于是方程①变为 $(x-4)(x-2)=0$

$(x-3)^2=1$。

∴ $x-3=\pm\sqrt{1}=\pm1$，即　$x=3\pm1$。

∴方程①的解为 $x=4$ 或 $x=2$，故原方程的解为 $x=4$ 或 $x=2$。

方法二(因式分解法)：

将方程①左边因式分解，得 $(x-4)(x-2)$

∴ $x-4=0$　或 $x-2=0$。

∴方程①的解为 $x=4$ 或 $x=2$ 故原方程的解为 $x=4$ 或 $x=2$。

方法三(公式法)：

方程①中，$a=1,b=-6,c=8$，$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times8=4>0$，方程有两个不等实根，代入求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 得，$x=\dfrac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\dfrac{6\pm2}{2}$，即 $x=\dfrac{6+2}{2}=4$或$x=\dfrac{6-2}{2}=2$，故原方程的解为 $x=4$或$x=2$。

说明：1．使用配方法解二次方程时，先把常数项移到”＝”右边，然后两边同时加上一次项系数的一半的平方，使方程左边变成完全平方式，右边是一个常数，再两边开平方即得。因式分解法是要先将方程的一边化为两个一次因式相乘，另一边是 0，再分别使各一次因式等于 0，进而求解。公式法是直接把 a,b,c 的值代入求根公式求得 x 的值。

2．配方法、公式法适用于所有一元二次方程，而因式分解法在求某些一元二次方程时比较简便，因此，在解一元二次方程时可以优先考虑此种方法，如果不行，再考虑配方法或公式法。

例 3．解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-y=3 & ① \\ 3x-8y=14 & ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a-b+c=0 & ① \\ 4a+2b+c=3 & ② \\ 25a+5b+c=60 & ③ \end{cases}$

方法一：(用代入消元法)

解(1)：由①得，$x=y+3$　　③

把③代入②得　3(y+3)－8y＝14,解这个方程得　y＝－1；

把 y＝－1 代入③　得　$x=2$

∴原方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

方法二：(用加减消元法)

解：由①×3　得　$3x-3y=9$　③

由③与②组成方程组 $\begin{cases} 3x-3y=9 \\ 3x-8y=14 \end{cases}$

③－②得　$5y=-5$，$y=-1$　把 $y=-1$ 代入①　得　$x=2$

∴原方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) ②－①，得 $a+b=1$　④

③－①，得　$4a+b=10$　⑤

由④与⑤组成二元一次方程组：

$\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b=10 \end{cases}$　解得 $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$

把 $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$ 代入①，得 $c=-5$

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-5 \end{cases}$

说明：解三元一次方程组的基本思路是通过“代入”或“加减”进行消元，把“三

元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再化为解一元一次方程。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．方程 $2x-4=-2$ 的解是(　　)。

A．$x=-1$　　B．$x=0$　　C．$x=1$　　D．$x=2$

2．$x^2-4=0$ 的解是(　　)。

A．$x==-2$　　B．$x=2$　　C．$x=\pm 2$　　D．以上答案均错

3．一元二次方程 $x(x-2)=0$ 根的情况是(　　)。

A．有两个相等的实数根　　B．有两个不相等的实数根

C．只有一个实数根　　D．没有实数根

4．一元二次方程 $x^2=2x$ 的根是(　　)。

A．$x=2$　　B．$x=0$　　C．$x_1=0$，$x_2=-2$　　D．$x_1=0$，$x_2=2$

5．用配方法解关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x-3=0$,配方后的方程可以是(　　)。

A．$(x-1)^2=4$　　B．$(x+1)^2=4$　　C．$(x-1)^2=16$　　D．$(x+1)^2=16$

6．方程组 $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 的解是(　　)。

A．$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$　　B．$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$　　C．$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$　　D．$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

二、填空题

1．方程 $\frac{1}{3}x-2=0$,则x的值为__________。

2．若 $3x^2-27=0$，则 x 的值为__________。

3．方程 $(2x-3)(x+2)=0$ 的解为__________。

4．当 m 满足__________时，关于 x 的方程 $x^2-4x+m-12=0$ 有两个不相等的实数根。

三、解答题

1．解下列方程：

(1) $25b-(b-5)=29$　　(2) $\frac{3y-1}{4}-1=\frac{5y-7}{6}$　　(3) $x^2-3x+2=0$

(4) $3x^2-2x-1=0$　　(5) $x^2+x-1=0$　　(6) $(2x-1)^2=(3-x)^2$

2．解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-5y=-3 \\ -4x+y=-3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3u+2t=7 \\ 6u-2t=11 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} 2x+4y+3z=9 \\ 3x-2y+5z=11 \\ 5x-6y+7z=13 \end{cases}$

能力提升

1．某城市居民最低生活保障在2009年是240元，经过连续两年的增加，到2011年提高到345.6元，则该城市两年来最低生活保障的平均年增长率是________。

2．某商品原售价289元，经过连续两次降价后售价为256元，设平均每次降价的百分率为x，可列方程为____________________。

3．顺风旅行社组织200人到宜州和南丹旅游，到宜州的人数比到南丹的人数的2倍少1人，问：到两地旅游的人数各是多少？

拓展训练

1．小方、小程两人相距6km，两人同时出发相向而行，1h相遇；同时出发同向而行，小方3h可追上小程。请问，两人的平均速度各是多少？

2．一个长方形的长减少5cm，宽增加2cm，就成为一个正方形，并且这两个图形的面积相等，这个长方形的长、宽各是多少？

3．一元一次不等式与一元一次不等式组

【知识回顾】

1．不等式的概念：用______表示不等关系的式子，叫做不等式。常见的不等号有①________②________③________④_________⑤__________。

2．不等式的性质：

(1) 不等式的两边_______(或减去)同一个_______(或式子)，不等式的方向不变；

(2) 不等式的两边_______(或除以)同一个_______，不等式的方向不变；

(3) 不等式的两边_______(或除以)同一个_______，不等式的方向改变。

3．一元一次不等式的概念：　含有______个未知数，而且未知数的次数是______的不等式。

4．解一元一次不等式的一般步骤一般可分为：

(1) _______ (2) _______ (3) _______ (4) _______ (5) _______

5．一元一次不等式组的概念：由______个一元一次不等式合在一起就组成了一元一次不等式组。

6．解一元一次不等式组的步骤：

(1) 求出不等式组中各个不等式的________；

(2) 画出数轴求出各个不等式的解集的________________即得原不等式组的解集。

【典例分析】

例1．解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $2(5+x)\leqslant 3(x-5)$　　　　(2) $\dfrac{2+x}{2}>\dfrac{2x-1}{3}$

解：(1) 去括号，得　$10+2x\leqslant 3x-15$

移项，得　$2x-3x\leqslant -15-10$

合并同类项，得　$-x\leqslant -25$

系数化为1，得　$x\geqslant 25$

这个不等式的解集在数轴上表示如图1-1所示。

(2) 去分母，得$3(2+x)>2(2x-1)$

去括号，得 $6+3x>4x-2$

移项，得 $3x-4x>-2-6$

合并同类项，得 $-x>-8$

系数化为 1，得 $x<8$

这个不等式的解集在数轴上表示如图 1-2 所示。

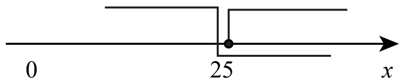


图 1-1

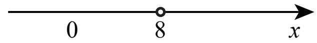


图 1-2

例 2．解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>x+1 & ① \\ x+8<4x-1 & ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+3\geqslant x+11 & ① \\ \dfrac{2x+5}{3}-1<2-x & ② \end{cases}$

解：(1) 解不等式①，得 $x>2$

解不等式②，得 $x>3$

可知，不等式组的解集为：$x>3$

(2) 解不等式①，得 $x\geqslant 8$

解不等式②，得 $x<\dfrac{4}{5}$

可看出两个不等式的解集无公共部分，所以，不等式组无解。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列各式中，是一元一次不等式的是(　　)

A．$5+4>8$　　B．$2x-1$　　C．$2x-5\leqslant 1$　　D．$\dfrac{1}{x}-3x\geqslant 0$

2．不等式组 $\begin{cases} 2x+3>1, \\ x-1<2 \end{cases}$ 的解集在数轴上的表示如图 1-3 所示，其中正确的是(　　)

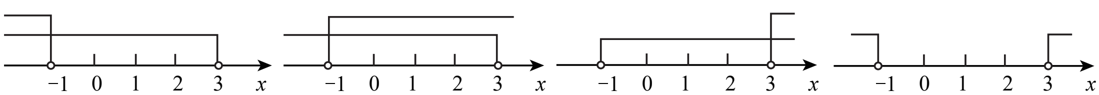


图 1-3

3．若 $\dfrac{2x+1}{3}$ 为非负数，则 x 的取值范围是（　　）。

A．$x\geqslant 1$　　B．$x\geqslant \dfrac{1}{2}$　　C．$x\geqslant -1$　　D．$x\geqslant -\dfrac{1}{2}$

4．在平面直角坐标系中，若点 $P(m-3,m+1)$ 在第二象限，则 m 的取值范围为(　　)。

A．$-1<m<3$　　B．$m>-1$　　C．$-1\leqslant m\leqslant 3$　　D．$m<3$

二、填空题

1．用恰当的不等号表示下列关系：

(1) a 的 5 倍与 8 的和比 b 的 3 倍小______；(2) c的一半小于或等于2 ______；

(3) d与e的差不大于-2： __________。

2．设 $m>n$，用“<”或“>”填空：

(1) $m-5$______$n-5$　　(2) $6m$______$6n$　　(3) $-3m$______$-3n$

(4) $2m-5$______$2n-5$　(5) $-3.5m+1$______$-3.5n+1$

三、解下列不等式和不等式组

(1) $5(x+2)\geqslant 1-2(x-1)$　　(2) $\dfrac{x-2}{2}-(x-1)<1$

(3) $\begin{cases}2y+7>3y-1\\ \dfrac{y-2}{5}\geqslant 0\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}5x-2>3(x+1)\\ \dfrac{1}{2}x-1\leqslant -\dfrac{3}{2}x\end{cases}$

能力提升

一、选择题

1．$-2<\dfrac{2(1-3x)}{5}\leqslant 4$ 的整数解是(　　)

A．$-1,0,1,2,3$　　B．$0,1,2,3$　　C．　　D．$-3,-2,-1,0,1$

2．设 $a<b<0$, 下列不等式中一定成立的是(　　)

A．$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B．$\dfrac{b}{a}>1$　　C．$3a>3b$　D．$a^2>ab$

二、填空题

1．不等式$3(x+1)\geqslant 5x-3$的正整数解有__________个？

2．若 $x=3$是方程$\dfrac{x-a}{2}-2=x-1$的解，则 $(5-a)x<\dfrac{1}{2}$ 的解集为____________。

三、解答题

1． x取哪些值时,$2\leqslant 3x-7<8$成立？

2．老张和老李购买了相同数量的种兔，一年后，老张养兔数比买入种兔数增加了 2 只，老李养兔数比买入种兔数的 2 倍少 1 只，老张养兔数不超过老李养兔数的$\dfrac{2}{3}$，一年前老张至少买了多少只种兔？

拓展训练

把一些书分给几名同学，如果每人分 3 本，那么余 8 本；如果前面的每名同学分 5 本，那么最后一人就分不到 3 本，这些书有多少本？共有多少人？

测试题

一、单项选择题(共 40 分)

1．$a^2b\cdot(-2ab^2)^2\cdot ab$ 的值为(　　)。

A．$-4a^5b^6$　　B．$4a^5b^6$　　C．$-4a^6b^5$　　D．$4a^6b^5$

2．当 $x=2$ 时，代数式 $2x^2-x+1$ 的值是(　　)。

A．15　　B．7　　C．3　　D．1

3．不等式 $-2x>6$ 的解是(　　)。

A．$x<-3$　　B．$x<3$　　C．$x>-3$　　D．$x>3$

4．方程 $3x-7(x-1)=3-2(x+3)$的解是(　　)。

A．-3　　B．5　　C．-7　　D．6

5．解集是如图 1-4 所示的不等式组为(　　)。

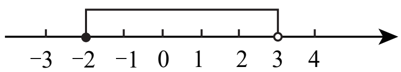


图 1-4

A．$\begin{cases}x+2\geqslant 0\\x-3>0\end{cases}$　　B．$\begin{cases}x+2<0\\x-3<0\end{cases}$　　C．$\begin{cases}-2x\leqslant 4\\\dfrac{1}{3}x-1<0\end{cases}$　　D．$\begin{cases}-2x+2\geqslant 4\\\dfrac{1}{3}x-1<0\end{cases}$

6．不等式组$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\x-2<0\end{cases}$的整数解为(　　)。

A．-1，1　　B．-1，1，2　　C．-1，0，1　　D．0，1，2

7．$x^2-16=0$ 的解是(　　)。

A．$x=-8$　　B．$x=8$　　C．$x=4$　　D．$x=\pm 4$

8．一元二次方程 $x^2+5x=0$ 的根是(　　)。

A．$x=0$　　B．$x=-5$　　C．$x_1=0, x_2=-5$　　D．以上答案均错

9．关于 x 的不等式 $2x-a\leqslant -1$ 的解集如图 1-5 所示，则 a 的取值是(　　)。

A．0　　B．-3　　C．-2　　D．-1

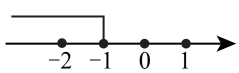


图 1-5

10．如果不等式 $ax<b$ 的解集是 $x<\dfrac{b}{a}$，那么 a 的取值范围是(　　)。

A．$a\geqslant 0$　　B．$a\leqslant 0$　　C．$a>0$　　D．$a<0$

二、填空题(共16分)

1．已知方程 $3x+5y-3=0$，用含 x 的代数式表示 y，则 $y=$______________。

2．不等式 $\dfrac{3-x}{2}-8\leqslant 0$ 的解集是______________。

3．已知二元一次方程 $3x+y+6=0$，当 x．y 互为相反数时，$x=$_____，$y=$_____

4．若$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$是方程$\begin{cases}2x+(m-1)=2\\nx+y=1\end{cases}$的解，则$(m+n)^{2008}$的值为

三、解答题(共44分)

1．计算$\dfrac{x^2-x-12}{x+4}\div\dfrac{x-4}{x^2+x-12}$的值(8 分)。

2．求下列各方程(16 分)。

(1) $\dfrac{2y-1}{3}-1=\dfrac{5y-7}{4}$　　(2) $x^2-x-12=0$

(3) $\begin{cases}-3(x-2)\geqslant 4-x\\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x+4y+3z=9\\3x-2y+5z=11\\5x-6y+7z=13\end{cases}$

3．某体育用品商场采购员要到厂家批发购进篮球和排球共 100 只，付款总额不得超过 11 815 元．已知两种球厂家的批发价和商场的零售价如表 1-1 所列，试解答下列问题 (20 分)：

表 1-1

品名	厂家批发价(元/只)	商场零售价(元/只)
篮球	130	160
排球	100	120

(1) 该采购员最多可购进篮球多少只？

(2) 若该商场把这 100 只球全部以零售价售出，为使商场获得的利润不低于 2580 元，则采购员至少要购篮球多少只，该商场最多可盈利多少元？

第二篇　中职数学练习

第 1 章　集合与充要条件

1.1　集合的概念

【知识回顾】

1．集合元素的两个性质：________________、________________。

2．不含任何元素的集合叫做__________，记作________________。

3．列举法：将集合的元素__________列出。

4．描述法：利用____________________________ 来表示集合。

5．$$\text{实数}(R)\begin{cases}\text{有理数}(Q)\begin{cases}\text{整数}(Z)\begin{cases}\text{自然数}(N)\begin{cases}\text{正整数}(N_+)\\0\end{cases}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\end{cases}\\\text{无理数}\end{cases}$$

【典例分析】

例 1．判断下列对象能否组成集合？

(1) 本校性格开朗的同学全体。　　(×)

(2) 绝对值小于 3 的整数全体。　　(√)

(3) 由-2，0，-1，0构成一个集合，这个集合共有 4 个元素。　　(×)

点评：因为(1)不符合集合元素的确定性，(3) 不符合集合元素的互异性，所以均不能构成集合。

例 2．用适当的方法表示下列集合。

(1) 构成英语单词 contents 字母的全体；

(2) 在自然数集内，小于 100 的奇数构成的集合。

解：(1) $\{c,o,n,t,e,s\}$

(2) $\{x\ |x=2n-1,n\in N_+,且\ n\leqslant 50\}$

分析：(1)由题意容易列出集合的元素，所以这题应该用列举法表示。但因为集合元素互异性，所以重复出现的字母只需写一个，如“n”。

(2) 由题意知集合元素不便一一列出，所以这题应该用描述法表示。通常，我们用 $2n$ 表示偶数，用 $2n-1$ 表示奇数。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列对象能组成集合的是(　　)。

A．本校高个子学生全体　　B．与1非常接近的实数全体
C．平方等于8的数　　D．我国著名科学家全体

2．由小于 10 的正奇数构成的集合中，元素的个数是(　　)。

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

3．用列举法表示小于 3 的自然数构成的集合，正确的是(　　)。

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{1,2\}$

4．用描述法表示不大于 5 的全体实数，正确的是(　　)。

A．$\{x\mid x\geqslant 5,\in N\}$　B．$\{x\mid x\leqslant 5,x\in N\}$　C．$\{x|x\leqslant 5,x\in R\}$　D．$\{x\mid x\leqslant 5,x\in Q\}$

二、填空题

1．用符号“∈”或“∉”填空。

1 ____ N　　1 ____ Z　　1 ____ Q
0 ____ N　　0 ____ Z　　0 ____ Q
-1____ N　　-1 ____ Z　　-1 ____ Q
0.3 ____ N　　0.3 ____ Z　　0.3 ____ Q

2．用列举法表示大于 1 且小于 11 的偶数全体所构成的集合____________________。

3．用描述法表示你所在班级所有同学构成的集合______________________。

三、用适当的方法表示下列集合

1．绝对值大于 4 且小于 7 的所有整数构成的集合。

2．方程 $x^2+5x-6=0$ 的集合。

3．大于 0 且小于 10 的正奇数的全体所构成的集合。

能力提升

一、选择题

1．下列对象能组成集合的是(　　)。

A．我校高个子学生全体　　B．与1非常接近的实数全体
C．9的正约数全体　　D．我国著名科学家全体

2．下列各式正确的是(　　)。

A．$-1\in N$　　B．$\frac{3}{2}\in Z$　　C．$\sqrt{5}\in Q$　　D．$\pi\in R$　π ∈R

3．用描述法表示集合 $\{-4,4\}$，正确的是(　　)。

A．$\{x\mid x+4=0\}$　B．$\{x\mid x-4=0\}$　C．$\{x\mid x^2=16\}$　D．$\{x\mid (x-4)^2=16\}$

4．下列各集合中，属于无限集的是(　　)。

A．$\{x\mid x+2=0\}$　B．$\{x\mid x^2+3=0\}$　C．$\{(x,y)\mid y=x+5\}$　D．$\{x\mid |x|\leqslant 0\}$

二、填空题

1．用列举法表示集合 $\{x\in Z|-2<x\leqslant 5\}=$________________________；

2．用描述法表示集合 $\{2,4,6,8,10,12\}$ ________________________；

3．用列举法表示集合 $\{x|x^2-2x-3=0\}$________________________。

三、用适当的方法表示下列集合

1．被 3 除余 1 的自然数的全体构成的集合。

2．18 的正因数的全体所构成的集合。

3．正方形全体构成的集合。

拓展训练

用适当的方法表示下列集合。

(1)平面α内与一定点 O 距离等于 5cm 的点的集合。

(2)梯形全体构成的集合。

(3)菱形全体构成的集合。

1.2　集合之间的关系

【知识回顾】

1．一般的，如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素，那么把集合 B 叫做集合 A 的_________，记作___________。

2．如果集合 B 是集合 A 的子集，并且 A 中至少有一个元素不属于 B，那么把 B 叫做 A 的，记作___________。

3．空集是任何集合的_________，即$\varnothing \subseteq A$。空集是任何非空集合的____________。

4．对于集合 A，B，C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；对于集合 A，B，C，如果 $A\supseteq B$，$B\supseteq C$，则 $A\supseteq C$。

5．如果 $A\subseteq B$，又 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；反之，如果 $A=B$，那么 $A\subseteq B$，并且 $B\subseteq A$。

【典例分析】

例．写出集合$A=\{1,2,3\}$的所有子集。

解：集合 A 的所有子集是$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$。

点评：首先$\varnothing$是所有集合的子集，然后写出所有由 1 个元素构成的集合，接着写出所有由 2 个元素构成的集合，最后写出所有由 3 个元素构成的集合。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列关系不正确的是(　　)。

A．$0=\varnothing$　　B．$\{3\}\subseteq Z$　　C．$3\in Z$　　D．$\pi\in R$

2．设$A=\{0,1\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，那么 A 与 B 之间关系正确的是(　　)。

A．$A\in B$　　B．$B\notin A$　　C．$A\subseteq B$　　D．$B\subseteq A$

3．集合$\mathrm{A}=\{x|x+1=0\}$，$\mathrm{B}=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$，那么 A 与 B 之间关系正确的是(　　)。

A．$A=B$　　B．$B\supseteq A$　　C．$A=B$　　D．$B\subseteq A$

二、用符号“$\in$”、“$\notin$”、“$\subseteq$”、“$=$”填空

(1) a____$\{a,b,c\}$　　(2) $\{a\}$____$\{a,b,c\}$　　(3) 5_____$\{2,4,6\}$

(4) $\{2,8\}$_____$\{2,4,6,8\}$　　(5) $\varnothing$____$\{0\}$　　(6) $\{x\mid x^2=1\}$_____$\{-1,1\}$

三、解答题

1．指出下列各对集合之间的关系：

(1) A＝{南宁市，柳州市，桂林市，河池市}， B＝{河池市}；
(2) A＝{ 1，3，5 }， B＝{ 1，2，3，4，5，6 }；
(3) A＝$\{x|x$是正方形}， B＝$\{x|x$是矩形}。

2．写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集和真子集。

3．用维恩图表示数集 N,Z,Q,R 之间的关系。

能力提升

一、选择题

1．集合 $A=\{-1,0,1\}$ 的所有真子集个数为(　　)。
A．8　　B．7　　C．6　　D．4

2．下列关系正确的是(　　)。
A．$\{1\}\in Q$　　B．$\{2\}\in\{2,3\}$　　C．$2\in\{2,3\}$　　D．$\{2\}\in Q$

3．设 m=1，$M=\{x|x\leqslant 2\}$，那么m与M之间的关系是(　　)。
A．$m\subseteq M$　　B．$m\supseteq M$　　C．$m\in M$　　D．$m\notin M$

4．设 $A=\{x|x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-4=0\}$，那么(　　)。
A．$A\subseteq B$　　B．$B\subseteq A$　　C．$A=B$　　D．$A\in B$

二、用符号“$\in$”、“$\subsetneqq$”、“＝”填空

(1) 0___$\{x|x\geqslant 0\}$　　(2) $\{x|x^2+1=0\}$___$\{x|x^2-1=0\}$　　(3) $\{x|x\geqslant 1\}$___$\{2,4,6\}$

(4) $\{x|x-2=0\}$___$\{x|x=2n,n\in N\}$　　(5) $\{x||x|=3\}$___$\{x|x^2-9=0\}$

(6) $\{x|x^2-5\mathrm{x}+6=0\}$___$\{x|x-3=0\}$

三、解答题

1．指出下列各对集合之间的关系：
(1) $A=\{x|x$是能被3整除的数$\}$，$B=\{x|x$是能被6 整除的数$\}$；
(2) $A=\{(x,y)|x\mathrm{y}<0\}$，$B=\{(x,y)|x>0,\mathrm{y}<0\}$。

2．指出下列四个集合之间的关系，并用维恩图表示：
$A=\{x|x$是平行四边形$\}$，$B=\{x|x$是正方形$\}$，$C=\{x|x$是四边形$\}$，$D=\{x|x$是矩形$\}$

拓展训练

1．已知 $A=\{(x,y)|x\langle 0,y\rangle 0\}$，$B=\{(-1,1)\}$，指出集合 A、B 之间的关系，并用维恩图表示。

2．已知 $A=\{1,\ a^2\}$，$B=\{1,4,\ a\}$，且 $A\subseteq B$，求 a 的值。

1.3　集合的运算

【知识回顾】

1．交集：$A\cap B=B\cap A$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

如果 $A\subseteq B$，那么$A\cap B=$_______。

2．并集：　$A\cup B=B\cup A$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$A\cup\varnothing=A$；

如果 $A\subseteq$ B，那么$A\cup B=$________。

3．补集：$A\cup C_UA=U$，$A\cap C_UA=\varnothing$，$C_U(C_UA)=A$。

【典例分析】

例．已知 $A=\{a,1,9\}$，$B=\{2,a^2,4\}$，且 $A\cap B=\{9\}$，求 a 的值。

解：因为$A\cap B=\{9\}$

所以$9\in A$，　$9\in B$，即$\begin{cases}a\neq 2、4\\ a^2=9\end{cases}\Rightarrow a=\pm 3$

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．设集合 $A=\{0,2,4,6\},B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cap B$、$A\cup B$分别为(　　)

A．$\{2,4\},\{0,1,2,2,3,4,4,6\}$　　　B．$\{0,1,2,3,4,6\},\{2,4\}$

C．$\{2,4\},\{0,1,3,6\}$　　　D．$\{2,4\},\{0,1,2,3,4,6\}$

2．设集合 $A=\{x|x\geqslant -1\},B=\{x|0<x<2\}$，则 $A\cap B=$(　　)。

A．$\{x|x\geqslant -1\}$　B．$\{x|-1\leqslant x<2\}$　C．$\{x|0\leqslant x<2\}$　D．$\{x|0<x<2\}$

3．设集合A=$\{x|2x+3\geqslant 0\}$,$B=\{x|x^2-1=0\}$,则$A\cup B=$(　　)。

A．$\{x|x^2-1=0\}$　B．$\{x|2x+3\geqslant 0\}$　C．$\{x|-1<x<1\}$　D．$\left\{x|-\frac{3}{2}<x\right\}$

4．设集合$U=\{0,1,2,3,4,5,6\},A=\{1,2,4\}$,则$C_UA=$(　　)。

A．$\{0,3,6\}$　B．$\{1,2,4\}$　C．$\{0,3,5,6\}$　D．$\varnothing$

二、填空题

1．$A=\{1,3,5,7\},B=\{1,2,3\}$，$A\cup B=$____________；

2．$P=\{x|2x\geqslant 0\},Q=\{x|x<2\}$，则$A\cap B=$____________；

3．设全集$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\},A=\{1,2,5,8\},B=\{0,2,4,6\}$，则$C_UA=$__________，$C_UB=$_________，$C_UA\cap C_UB=$___________，$C_UA\cup C_UB=$___________。

三、解答题

1．已知$A=\{1,3,5,9\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{0,4\}$，求$(A\cap B)\cup C$。

2．已知$U=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{-1,1,3\}$，$B=\{1,3,5,6\}$。

求C_UA，C_UB，$C_U(C_UA)$，$A\cap C_UB$，$B\cup C_UB$。

能力提升

一、选择题

1．设集合 $A=\{平行四边形\}$，$B=\{矩形\}$，则 $A\cap B=(\quad)$。

A．$\{平行四边形\}$　　B．$\{矩形\}$　　C．$\{正方形\}$　　D．$\varnothing$

2．已知 $P=\{a,b,c\}$，$Q=\{b,c,d\}$，则 $P\cup Q=(\quad)$。

A．$\{a,b,c\}$　　B．$\{a,b,c,d\}$　　C．$\{b,c,d\}$　　D．$\{b,c\}$

3．已知 $U=\{0,1,2,3,4\}$，$C_U A=\{1,3\}$ 则集合 A 的真子集个数为(　　)。

A．8　　B．7　　C．6　　D．5

4．设 $U=\boldsymbol{R}$，$M=\{x|x<2\}$，则 $C_U M=(\quad)$。

A．$\{x|x>2\}$　　B．$\{x|x\geqslant 2\}$　　C．$\{x|x>-2\}$　　D．$\{x|x\geqslant -2\}$

二、填空题

1．设 $M=\{1\}$，$N=\{1,2\}$，$P=\{1,2,4\}$，则 $(M\cup N)\cap P=$________________。

2．设全集为 R，集合 $A=\{x|x\leqslant -3\}$，则 $C_U A=$__________________________。

3．已知集合 $A=\{1,a\}$，$B=\{2,3\}$，$A\cap B=\{2\}$，则 a=_______________。

4．用集合的交、并、补符号表示图 2-1 的阴影部分。

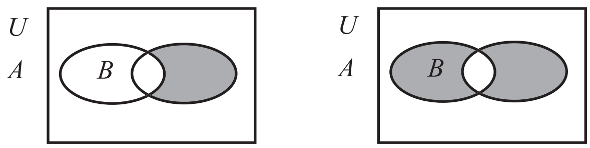


图 2-1

三、解答题

1．设 $P=\{x|2x-1=1\}, Q=\{x|x^2=1\}$，求 $P\cap Q$、$P\cup Q$。

2．已知 $U=R$，$A=\{x|-1\leqslant x<5\}$，$B=\{x|x\geqslant 3\}$。

求 $A\cap B$，$A\cup B$，$C_U A$，$C_U B$，$C_U(A\cap B)$，$A\cap C_U B$，$B\cup C_U B$。

拓展训练

1．已知 $A=\{三角形\}$，$B=\{等腰三角形\}$，$C=\{直角三角形\}$，$D=\{等边三角形\}$，用维恩图表示它们之间的关系。

2．已知 $M=\{a,b,3\}$，$N=\{2a,b^2,3\}$，且满足 $M=N$，求 a、b 的值。

1.4　充要条件

【知识回顾】

1．$p\overset{\text{充分}}{\Rightarrow}q$：如由 p 可推出 q，则 p 是 q 的充分条件；

2．$p\overset{\text{必要}}{\Leftarrow}q$：如由 q 可推出 p，则 p 是 q 的必要条件；

3．$p \overset{\text{充要}}{\Leftrightarrow} q$：如由 p 可推出 q，由 q 也可推出 p，则 p 是 q 的充要条件。

【典例分析】

例、已知 A 是 B 的充要条件，B 是 C 的必要条件，那么 A 是 C 的什么条件？

解：A 是 C 的必要条件。

点评：由已知可得 $A \overset{\text{充要}}{\Leftrightarrow} B \overset{\text{必要}}{\Leftarrow} C$，从右向左看，不难发现 $C \Rightarrow B \Rightarrow A$，所以 A 是 C 的必要条件。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．“$a>2$”是“$a>5$”的(　　)。

A．充分条件　B．必要条件 C．充要条件 D．既不是充分条件也不是必要条件

2．“$a>0且b>0$”是“$ab>0$”的(　　)。

A．充分条件　B．必要条件 C．充要条件 D．既不是充分条件也不是必要条件

3．“$x^2-4=0$”是“$x-2=0$”的(　　)。

A．充分条件　B．必要条件 C．充要条件 D．既不是充分条件也不是必要条件

4．“$x,y\in R$，$x^2+y^2=0$”是“$x=0且y=0$”的(　　)。

A．充分条件　B．必要条件 C．充要条件 D．既不是充分条件也不是必要条件

二、用符号“$\Rightarrow$”、“$\Leftarrow$”、“$\Leftrightarrow$”填空

$x<-1$ ______ $x<0$　　　　小红是广西人______小红是河池人

$x>0$ ______ $|x|>0$　　　　$x=\dfrac{2}{3}$ ______ $x^2=\dfrac{4}{9}$

$a=b$ ______ $a+d=b+d$　　　　$a\in N_+$ ______ $a\in Z$

三、解答题

1．$p:(x-2)=0$，$q:(x+1)(x-2)=0$，则 p 是 q 的什么条件？

2．$p:|x|=2$，q：$x=2$，则 p 是 q 的什么条件？

3．p：$x=3$，q：$x^2-5+6=0$，则 p 是 q 的什么条件？

能力提升

一、选择题

1．“x 是无理数”是“x 是实数”的(　　)。

A．充分条件　　B．必要条件　　C．充要条件　　D．既不是充分条件也不是必要条件

2．“$b=0$”是“一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过原点”的(　　)。

A．充分条件　　B．必要条件　　C．充要条件　　D．既不是充分条件也不是必要条件

3．“$A=\varnothing$”是“$A\cup B=B$”的(　　)。

A．充分条件　　B．必要条件　　C．充要条件　　D．既不是充分条件也不

是必要条件

二、用符号“$\Rightarrow$”、“$\Leftarrow$”、“$\Leftrightarrow$”填空

$A\subseteq$ B _______ $A\cap B=A$　　　　$x\in A$ _______ $x\in A\cap B$

a=b _______ $|a|=|b|$　　　　a=0 _______ $a^2-3a=0$

$a\neq 0$ _______ $ab\neq 0$　　　　$x\neq 5$ _______ $x^2\neq 25$

三、解答题

1．p：$A\subseteq B$，q：$A\cap B=A$，则 p 是 q 的什么条件？

2．p：菱形，q：正方形，则 p 是 q 的什么条件？

3．p：末尾是 5 的整数，q：可以被 5 整数的整数，则 p 是 q 的什么条件？

拓展训练

1．已知 p 是 q 的充分条件，s 是 p 的充要条件，那么 s 是 q 的什么条件？

2．已知 p 是 q 的充分条件，q 是 r 的充要条件，s 是 r 的必要条件，则 s 是 p 的什么条件？

测试题

一、选择题(共36分)

1．下列各组对象能形成集合的是(　　)。

A．所有的好人　B．与1非常接近的数　C．9的正约数　D．我国著名科学家

2．下列关系式中不正确的是(　　)。

A．$0\in\{0\}$　B．$3\in\{2,3,4\}$　C．$-1\in\{(-1,2)\}$　D．$5\in\{x|x>0\}$

3．设 M={a}，则下列写法正确的是(　　)。

A．a=M　B．$a\in M$　C．$a\subseteq M$　D．$a\supseteq M$

4．设集合 $M=\{-2,0,1\}$，$N=\{0\}$，则(　　)。

A．$N=\varnothing$　B $N\in M$　C．$N\subseteq M$　D．$M\subseteq N$

5．已知集合 A=$\{1,2,4,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cup B$ =(　　)。

A．{2,4}　B．{1,2,3,4,5}　C．{1,2,2,4,4,5}　D．{1,2,4,5}

6．如果 A＝{x|x<1}, 则(　　)。

A．$0\subseteq A$　B．$\{0\}\in A$　C．$\varnothing\in A$　D．$\{0\}\subseteq A$

7．下列命题正确的是(　　)。

A．空集没有子集　B．空集是任何一个集合的真子集

C．任何一个集合必有两个或两个以上的子集　D．设集合 $B\subseteq A$，若 $x\in B$，则 $x\in A$

8．若 U={x|x 是小于 9 的自然数}，A={1,3,5,7}，则 C_UA=(　　)。

A．{1,3,5,7}　B．{0,2,4,6,8}　C．{2,4,6,8}　D．{2,4,6,8,9}

9．“a=0”是“a^2-3a=0”的(　　)。

A．充分条件　B．必要条件 C．充要条件 D．既不是充分条件也不是必要条件

二、填空题(共16分)

1．用列举法表示集合{ $x\in Z$ | $-2<x<4$}=__________________ 。

2．集合$\{1,2,3,4\}$的真子集个数共有__________个。

3．设集合 $U=\{x \mid x\geqslant 0\}$，$C_U A=\{x \mid 0\leqslant x<2\}$，则 $A=$_____________。

4．"$x>5$"是"$x>3$"的_____________条件。

三、解答题(共48分)

1．已知全集$U=R$，集合$A=\{x|-1\leqslant x<3\}$，求 $C_U A$。

2．由方程$x^2+4x-5=0$的解作为元素组成集合 M，写出集合 M 的所有子集和真子集。

3．已知集合，$A=\{1,2,m^2-3m-1\}$，$B=\{2m,-3\}$，且 $A\cap B=\{-3\}$，求 m。

第 2 章　不等式

2.1　不等式的基本性质

2.1.1　比较实数大小的方法

【知识回顾】

1．实数可以和数轴上的点__________，数轴上右边的点对应的数比左边的点对应的实数__________(大或小)。

2．比较两个实数的大小，通常采用“__________________________________”的方法，即：$a-b>0\Leftrightarrow$__________；　$a-b<0\Leftrightarrow$__________；$a-b=0\Leftrightarrow$ __________。

【典例分析】

例 1．比较下列各对实数的大小：

(1) $\frac{3}{4}$ 与 $\frac{4}{7}$　　　　(2) $\frac{4}{5}$ 与 $\frac{7}{9}$

解：(1) $\frac{3}{4}-\frac{4}{7}=\frac{21-16}{28}=\frac{5}{28}>0$，因此 $\frac{3}{4}>\frac{4}{7}$

(2) $\frac{4}{5}-\frac{7}{9}=\frac{36-35}{45}=\frac{1}{45}>0$，因此 $\frac{4}{5}>\frac{7}{9}$

点评：比较两个实数的大小采用求两数的差的正负判断大小，若两数差等于 0，则两数相等。

例 2．当 $a>b>0$ 时，比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小。

解：$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，因为 $a>b>0$，所以 $b-a<0$，$ab>0$，

从而 $\frac{b-a}{ab}<0$，故 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

点评：同号两数的积为正数(即大于 0)，异号两数的积为负数(即小于 0)。

【能力检测】

基础闯关

一、比较下列两组实数的大小

1．-5 与 -3　　　　2．$-\frac{1}{2}$ 与 $-\frac{1}{3}$

3．$\frac{5}{6}$ 与 $\frac{6}{7}$　　　　4．$\frac{5}{11}$ 与 $\frac{4}{9}$

二、当 $a<b<0$ 时，比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小。

能力提升

一、比较下列两组实数的大小

1．$-\frac{5}{7}$ 与 $-\frac{7}{11}$　　　　2．$\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ 与 $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

3．$x(x-2)$ 与 $(x-1)^2$　　　　4．$2x^2-x-1$ 与 x^2+x-2

二、比较下列各组中代数式的大小

1．$\frac{b}{a}$ 与 $\frac{b+1}{a+1}$ $(b>a>0)$

2．x^2+y^2 与 $2(2x-y)-5$

拓展训练

一、比较 $(x-3)(x+1)$ 与 $(x-1)^2$ 大小。

二、当 $0<a<1$ 时，请对 a^2、a、$\frac{1}{a}$ 从大到小进行排序。

2.1.2　不等式的基本性质

【知识回顾】

1．性质 1：如果 $a>b, b>c$，那么 a ___ c，这个性质叫做不等式的_________。

2．性质 2：如果 $a>b$，那么 $a+c$____$b+c$，　这个性质叫做不等式的_________。

3．性质 3：如果 $a>b, c>0$ 那么 ac____bc；如果 $a>b, c<0$ 那么 ac____bc；这个性质叫做不等式的_________。

4．请用求差的方法证明不等式的性质 2。

【典例分析】

例 1．设 $a>b$，请比较 $1-a$ 与 $1-b$ 的大小。

解：因为 $a>b$，由不等式性质 3 知：

$-a<-b$，又由不等式性质 2 得：

$1-a<1-b$。

例 2．证明：如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$。

证明：因为 $a>b$，由不等式性质 2 知，

$a+c>b+c$。

又 $c>d$，由不等式性质 2 知，$b+c>b+d$

根据不等式性质 1 知，

$a+c>b+d$。

点评：证明不等式成立时，一般可以从结论出发进行观察和分析，证明时从条件出发根据不等式性质向所要证明的结论形式进行变换，直到得出结论。

【能力检测】

基础闯关

一、用“>”或“<”符号填空

1．$a-5$____$a-3$ ；　　2．$5a$______$5a$（$a<0$）；

3．$\frac{1}{2}a$______$\frac{1}{2}b(a>b)$；　　4．$-\frac{1}{4}x$______$-\frac{1}{4}y\ (x<y)$。

二、选择题

1．若 $a>b$,下列式子不正确的是(　　)。

A．$b>a$　　B．$-a<-b$　　C．$a-2>b-2$　　D．$-5a>-5b$

2．下列说法正确的是(　　)。

A．如果$a>b$，$c>b$，那么 $a>c$；　　B．如果$ac>bc$，那么$a>b$；

C．如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$；　　D．如果 $a>b$，那么$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$。

三、证明：如果 $a>b$，那么 $c-3b<c-3a$

能力提升

一、填空题

1．若 $a-1>2$，则 $a>$_____。

2．若 $3x+5<x-7$，则 $x<$_______。

3．若$\frac{x-3}{2}>\frac{1}{3}$，则 $x>$_______。

4．若 $2a+1>2b+3$，则 $a-b>$________。

5．若 $a>0$，则 $-\frac{a+b}{2}$_______$-\frac{b}{2}$。

二、求下列不等式的解

1．$6x+8<3x+2$

2．$2-3x>3-4x$

三、证明：设 $a>b>0, c>d>0$,则 $a^2c > b^2d$。

拓展训练

一、填空题

如果 $1<a<3, 2<b<4$,则：

1．$a+b$ 的取值范围是_________________ ；

2．$2a-b$ 的取值范围是_________________ ；

3．$2a+b+1$的取值范围是_________________。

二、已知 $a<0,-1<b<0$,请比较 a,ab,ab^2 的大小。

2.2　区间

2.2.1　有限区间

【知识回顾】

1．由数轴上两点间的________所组成的集合叫做区间，其中，这两个点叫做________；

2．集合$\{x|a<x<b\}$用区间表示记为____________,不含端点的区间叫做____________；

3．集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$用区间表示记为____________,含有两个端点的区间叫做__________；

4．集合$\{x|a\leqslant x<b\}$用区间表示记为__________；集合$\{x|a<x\leqslant b\}$用区间表示记为：____________,只含有一个端点的区间叫做_____________。

【典例分析】

例 1．用区间表示下列不等式的解集。

(1) $-1<x<3$　　　(2) $-2\leqslant 2x\leqslant 8$

解：(1) 因为不等式$-1<x<3$ 的解集是 $\{x|-1<x<3\}$，

所以，用区间表示为 $(-1，3)$。

(2) 由$-2\leqslant 2x\leqslant 8$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 4$，

解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$

所有，用区间表示为 $[-1,4]$。

例 2．已知集合 $A=(-2，3)$，集合 $B=[1，5)$，求 $A\cap B$，$A\cup B$。

解：将两个集合在数轴上表示出来如图 2-2 所示，通过观察图形知

$A\cap B=[-1,3)$，$A\cup B=-2,5$ 。

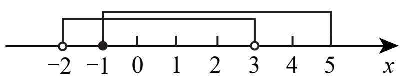


图 2-2

点评：在求不等式的解或区间的交、并集时，一般借助数轴观察。

【能力检测】

基础闯关

一、填空题

1．在表 2-1 中的空白处填上表 2-1 适当的区间。

表 2-1

集合	$\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$	$\{x|1<x\leqslant 3\}$	$\{x|-1\leqslant x<1\}$	$\{x|-2<x<0\}$
区间				

2．(1)已知集合 A=（0，3），集合 B=[−2，4)，则：

$A\cap B=$______________；$A\cup B=$______________ 。

(2)已知集合 A=（−∞，0），集合 B=[−1,3]，则：

$A\cap B=$______________；$A\cup B=$______________ 。

二、已知集合 A=（−2，0），集合 B=[−1,2]，求 $A\cap B$； $A\cup B$ 。

能力提升

1．用区间表示下列不等式的解集：

(1) $-1\leqslant x<3$　　　　(2) $-1\leqslant \dfrac{x}{2}<1$

2．用集合的描述法表示下列各区间：

(1) $[-5,6)$　　　　(2) $(-2,0)$

3．已知集合 A=（−1，1），集合 B=（−2，3]，集合 C=（−3，0]。

求 $A\cap B$；$A\cup B$;$B\cap C$;$A\cap B\cap C$ 。

拓展训练

某条高速路上规定，正常行驶时小车的最低速度60km/h，最高时速不能超过120km/h。请用区间表示该高速公路的限速范围。

2.2.2　无限区间

【知识回顾】

1．集合$\{x|\ x>a\}$用区间表示记为____________，其中符号“+∞”读作“______________”。

2．集合$\{x|\ x<b\}$用区间表示记为____________，其中符号“−∞”读作“______________”。

3．实数集用区间表示为____________________。

4．集合$\{x|x\geqslant 0\}$用区间表示记为____________。

5．集合$\{x|x\leqslant -2\}$用区间表示记为____________。

【典例分析】

例．求下列不等式(组)的解集。

(1) $2x+3>4x-5$　　　　(2) $\begin{cases}2x+1>3\\1-x\geqslant -3\end{cases}$

解：(1) 由不等式 $2x+3>4x-5$ 得

$-2x>-8$

$x<4$

所以，原不等式的解集为 $(-\infty，4)$。

(2) 不等式 $2x+1>3$ 的解集为(1，+∞)；不等式 $1-x\geqslant -3$ 的解集为(−∞，4]。

故不等式组的解集为(1，4]。

点评：求不等式组的解集，就是将两个不等式的解集求出来，然后再求两个解集的交集即可。

【能力检测】

基础闯关

一、填空题

1．在表 2-2 中的空白处填上适当的区间。

表 2-2

集合	$\{x\|x\leqslant 2\}$	$\{x\|x<2\}$	$\{x\|x\geqslant 1\}$	$\{x\|x>1\}$	实数集 R
区间					

2．(1) 已知集合 $A=\{x|x>-1\}$,集合 $B=\{x|x<2\}$，则：

$A\cap B=$______________；$A\cup B$ _______________ (用区间表示)。

(2) 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x<2\}$,集合 $B=\{x|x>-1\}$，则：

$A\cap B=$______________；$A\cup B$ _______________ (用区间表示)。

二、已知集合 $A=(-2，2)$，集合 $B=[0，3]$，求 $A\cap B$；$A\cup B$；C_UA；C_UB。

三、求下列不等式(组)的解集

1．$3x-1>2x+1$；　　　　2．$\begin{cases} x+1>2 \\ 1-x\geqslant 1 \end{cases}$

能力提升

一、用区间表示下列不等式的解集

1．$x\geqslant 3$　　　　2．$2\ x<-1$

3．$3\ x>-3$　　　　4．$\dfrac{x}{2}<-1$

二、用集合的描述法表示下列各区间

1．$(1,+\infty)$　　　　2．$(-\infty，0)\cup(2，+\infty)$

三、已知集合 $A=(-\infty，0)$，集合 $B=(-2，2]$，集合 $C=(-\infty，-1]$

求 $A\cap B$；$A\cup B$；$B\cap C$；$A\cap B\cap C$；C_UA；C_UB。

拓展训练

已知集合 $A=(-\infty，1)$，集合 $B=(-2，+\infty)$，

求 $A\cap B$；$A\cup B$；C_UA；C_UB；$B\cap C_UA$；$C_UB\cap C_UA$；$C_UB\cup C_UA$。

2.2.3　一元二次不等式

【知识回顾】

1．二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图像是一条抛物线，其顶点坐标为________________，当 $a>0$ 时，抛物线的开口_________，当 $a<0$ 时，抛物线的开口_________。

2．一元二次方程 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$的求解公式为 $x=$____________________；解的判别式 $\Delta=$________________；当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数解；当 $\Delta=0$ 时，方程有两

个相等的实数解；当Δ<0 时，方程没有实数解。

3．当 $a>0$ 时一元二次不等式的解集如表 2-3 所示($x_1<x_2$)。

表 2-3

方程或不等式	解　集		
	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_0\}$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c>0$			
$ax^2+bx+c\geqslant 0$			
$ax^2+bx+c<0$			
$ax^2+bx+c\leqslant 0$			

为了更好地记忆，可以借助二次函数的图像来记住解集对应的区间。

【典例分析】

例．解下列一元二次不等式

(1) $x^2<4$　　　　　　(2) $-x^2+5x-6\leqslant 0$

解：(1)原不等式可化为 $x^2-4<0$，因为二次项系数为 1>0，且方程 $x^2-4=0$ 的解为 $x_1=-2, x_1=2$，故不等式 $x^2<4$ 的解集为（−2，2)。

(2) 原不等式可化为 $x^2-5x+6\geqslant 0$，因为二次项系数为 1>0，且方程 $x^2-5x+6=0$ 的解为 $x_2=2, x_1, =3$，故不等式 $-x^2+5x-6\leqslant 0$ 的解集为（$-\infty$，2)∪(3，$+\infty$)。

点评：解一元二次不等式的基本步骤如下。

① 判断二次项系数是否为正数，如果不是则转化为正的；

② 判断对应的方程是否有解，若有则求出其解；

③ 借助相应的二次函数图像写出原不等式的解集。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．不等式 $x^2-16\geqslant 0$ 的解集为(　　)。

A．$(-4,4)$　　B．$[-4,4]$　　C．$(-\infty，-4)\cup(4，+\infty)$　　D．$(-\infty，-4]\cup[4，+\infty)$

2．不等式$x^2-2x+1>0$的解集为(　　)。

A．$(-\infty,1)$　　　　B．$(1,+\infty)$

C．$(-\infty，1)\cup(1，+\infty)$　D．$(-\infty，-1]\cup[1，+\infty)$

3．不等式$x^2+1>0$的解集为(　　)。

A．$(-\infty,-1)$　　　B．$(-1,+\infty)$

C．R　　　　　　D．$\varnothing$。

4．若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图 2-3 所示，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为(　　　)。

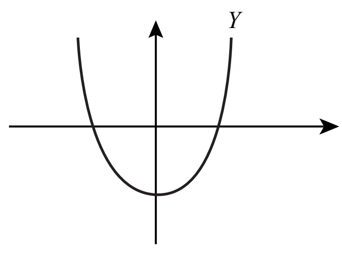


图 2-3

A．$(-1,1)$　　　　　B．$[-1,1]$

C．$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$　　D．$(-\infty，-1]\cup[1，+\infty)$

二、解下列不等式

1．$9x^2-1>0$　　2．$x^2-5x+6\leqslant 0$

3．$-x^2+2x+3\leqslant 0$　　4．$-2x^2+x+3>0$

能力提升

一、解下列一元二次不等式

1．$2(x+6)(x-1)>0$　　2．$x+1x-1-3\leqslant 0$

3．$-x^2+2x+3\leqslant -2x^2-4x+1$　　4．$(x+1)^2-4<0$

二、当 x 什么实数时，$\sqrt{2x^2-8}$ 有意义

三、求不等式 $0<x^2+2x-3\leqslant 5$ 的解集

拓展训练

1．若不等式 $ax^2+ax-3<0$ 的解集为实数集 R，求 a 的取值范围。

2．已知集合 $A=\{x\mid x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x\mid x^2-4<0\}$ {求 $A\cap B$；　$A\cup B$。

2.3　含绝对值的不等式

2.3.1　不等式|x|<a 或|x|>a

【知识回顾】

1．对任意 x，有$|x|=\begin{cases}(\quad),x>0\\ 0,x=0\\ (\quad),x<0\end{cases}$，其几何意义是______________________。

2．不等式$|x|<a(a>0)$的解集是：____________________________。

3．不等式$|x|>a(a>0)$的解集是：____________________________。

4．不等式$|x|\leqslant a(a>0)$的解集是：____________________________。

5．不等式$|x|\geqslant a(a>0)$的解集是：____________________________。

【典例分析】

例．解下列各不等式

(1) $2|x|-3<0$　　(2) $3|x|\geqslant 9$

解：(1) 原不等式可化为 $|x|<\dfrac{3}{2}$，所以原不等式的解集为

$(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$。

(2) 原不等式可化为$|x|\geqslant 3$，故原不等式的解集为

$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$。

【能力检测】

基础闯关

解下列各不等式

1．$|x|-1>0$　　　　2．$|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$

3．$2|x|\leqslant 4$　　　　4．$1-2|x|<0$

能力提升

解下列各不等式

1．$\left|\dfrac{1}{2}x\right|\leqslant 1$；　　　　2．$\dfrac{|x|}{3}-1>0$

拓展训练

解下列各不等式

1．$2|x|+1\leqslant 1-|x|$；　　　　2．$\dfrac{|x|+2}{3}-2>0$

2.3.2　不等式$|ax+b|<c$或$|ax+b|>c$

【知识回顾】

1．对形如$|ax+b|<c$或$|ax+b|>c$的不等式可以通过____________的方法求解，即设$m=ax+b$，先对$|m|>0$或$|m|<0$的不等式进行求解，然后将m替换为x的不含绝对不等式进行求解。在实际运算中，替换过程可以省略。

2．求解不等式$|2x|<4$的过程：由原不等式知：$-4<2x<4$，于是______________，故原不等式的解集为________________________。

【典例分析】

例．解下列各不等式

(1) $x-3|<1$　　　　(2) $\dfrac{|2x+1|}{3}-1>0$。

解：(1)原不等式可得　$-1<x-3<1$，$2<x<4$。

故原不等式的解集为(2，4)。

(2) 原不等式可化为$|2x+1|\geqslant 3$

可得　$2x+1\geqslant 3$ 或 $2x+1\leqslant -3$

即　$x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -2$

故原不等式的解集为$(-\infty，-2)\cup(1，+\infty)$。

【能力检测】

基础闯关

解下列各不等式

1．$|x-1|>1$　　2．$|3x+2|\leqslant 5$

3．$2|2x-3|\leqslant 4$　　4．$2-|x+3|<0$

能力提升

解下列各不等式

1．$\left|\frac{2}{3}x-3\right|\leqslant 1$　　2．$2|x-2|+5>3\left(|x-2|+1\right)$

拓展训练

求不等式$\left(|x+1|\right)2-2|x+1|-3\geqslant 0$的解集。

测试题

一、选择题(共32分)

1．设$a>b, c\neq 0$则下列式子正确的是(　　)。

A．$ac>bc$　　B．$a+c>b-c$　　C．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D．$ac^2>bc^2$

2．不等式$-3x>6$的解集是(　　)。

A．$\{x|x<-2\}$　　B．$\{x|x<2\}$　　C．$\{x|x>2\}$　　D．$\{x|x>-2\}$

3．不等式$|2-x|<1$的解集是(　　)。

A．$\{x|1<x<3\}$　　B．$\{x|-3<x<-1\}$　　C．$\{x|x<1或x>3\}$　　D．$\{x|<-3或x>-1\}$

4．关于x的方程$2x-k=3(x-k)+1$的解是正数，那么k应满足(　　)。

A．$k<\frac{1}{2}$　　B．$k>\frac{1}{2}$　　C．$k>2$　　D．$k<2$

5．不等式组$\begin{cases}2x-1<3\\2x-3<3x\end{cases}$的解集是(　　)。

A．$\{x|-2<x<3\}$　　B．$\{x|-3<x<2\}$　　C．$\{x|x<-3或x>2\}$　　D．$\{x|x<-2或x>3\}$

6．设$P=(x^2-1)^2, Q=x^4+x^2+1$，则P与Q的大小关系为(　　)。

A．$P>Q$　　B．$P\geqslant Q$　　C．$P<Q$　　D．$P\leqslant Q$

7．不等式$x^2-x-2\geqslant 0$的解集是(　　)。

A．$\{x|-1<x<2\}$　　B．$\{x|-2<x<1\}$　　C．$\{x|x<-1或x>2\}$　　D．$\{x|x<-2或x>1\}$

8．不等式$1<\frac{1}{x}$的解集是(　　)。

A．$\{x|x>1\}$　　B．$\{x|x<1\}$　　C．$\{x|0<x<1\}$　　D．$\{x|x<-1或x>1\}$

二、填空题(共16分)

1．$\frac{7}{9}$ _____ $\frac{9}{11}$，$-\frac{6}{17}$ _____ $-\frac{9}{23}$（填“>”或“<”）。

2．用区间表示集合$\{x \mid -1<x<4\}$为 ______________。

3．不等式 $x^2 < 2x$ 的解集是__________________。

4．不等式$|5x|>5$ 的解集是_______________________。

5．不等式$-|x-3|>-5$ 的解集是_______________________。

三、解答题(共48分)

1．比较代数式$(x+2)(x+3)$与$(x+6)(x-1)$的大小。

2．求下列一元二次不等式的解集

(1) $-x^2+2x+3>0$　　(2) $3x^2+8x-3\leqslant 0$

3．求下列绝对值不等式的解集

(1) $|2x+1|<2$　　(2) $|2(x+3)+1|\geqslant 1$

4．设集合 $A=\{x|x>2\}$，集合 $B=\{x|1<x<3\}$，求(1) C_UA，C_UB　(2) $C_UA \cup C_UB$；(3) $C_U(A\cap B)$。

第 3 章　函数

3.1　函数的概念及表示法

3.1.1　函数的概念

【知识回顾】

1．函数的概念：在某一个变化过程中有两个变量 x 和 y，设变量 x 取值范围为数集 D，如果对于 D 内的__________ x 值，按照某个______________ f，y 都有________确定的值与它对应，那么，把 x 叫做自变量，把 y 叫做 x 的函数，记作 $y=f(x),(x\in D)$，数集 D 叫做函数的____________。

2．函数值的概念：当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 对应的值 y_0 叫做函数在点处的函数值，记作________________。

3．函数的值域：__________的集合叫做函数的值域，记作 { y |________________}。

4．函数定义中的两个要素是____________和______________，因此判定两个函数是否相同时，就看定义域和对应法则是否____________，完全一致的两个函数才算相同。

【典例分析】

例 1．求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$　　(2) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$

解：(1) 要使 $\sqrt{x+1}$ 有意义，则 $x+1\geqslant 0$；要使 $\dfrac{1}{2-x}$ 有意义，则 $2-x\neq 0$；

所以得不等式组 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\2-x\neq 0\end{cases}$，　解得 $x\geqslant -1且x\neq 2$

所以函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant -1且x\neq 2\}$，即 $[-1,2)\cup(2,+\infty)$。

(2) 要使 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 $x-2\geqslant 0$；要使 $\sqrt{2-x}$ 有意义，则 $2-x\geqslant 0$；

所以得不等式组 $\begin{cases}x-2\geqslant 0\\2-x\geqslant 0\end{cases}$，　解得 $\begin{cases}x\geqslant 2\\x\leqslant 2\end{cases}$，即 $x=2$。

所以函数 $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$ 的定义域为 $\{x\mid x=2\}$。

点评：求函数的定义域应使解析式有意义。①分母不为零；②根式要有意义；③若为多个部分组成，则取使各部分式子都有意义的实数集合。实际问题还应考虑实际问题有意义。定义域一般用集合或区间表示。

例 2．求下列函数的值域：

(1) $f(x)=2x-1,x\in\{1,2,3\}$　　(2) $y=2x-1,x\in(1,3)$　　(3) $y=\sqrt{x}+1$

解：(1) (直接法) $\because f(1)=2\times 1-1=1$，$f(2)=2\times 2-1=3$，$f(3)=2\times 3-1=5$，

$f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 函数 $f\left(x\right)=2x-1$ 的值域是 $\{1,3,5\}$ 。

(2)（图像法)作出函数 $y=2x-1,x\in\left(1,3\right)$ 的图像(如图 2-4 所示)：

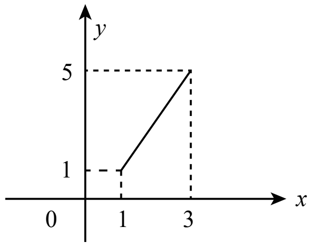


图 2-4

由图像知函数 $y=2x-1,x\in\left(1,3\right)$ 的值域是 $\left(1,5\right)$ 。

(3)（观察法)$\because \sqrt{x}\geqslant 0$ ， $\therefore \sqrt{x}+1\geqslant 1$

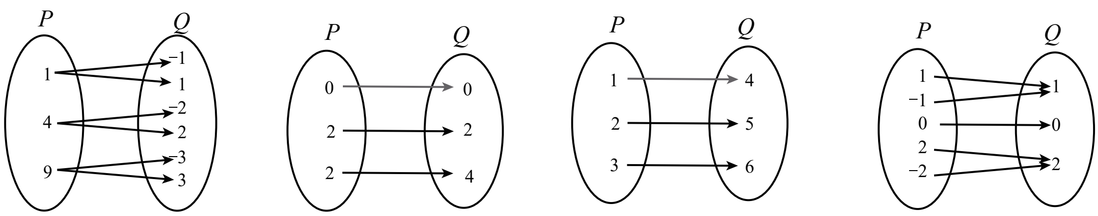
$\therefore$ 函数 $y=\sqrt{x}+1$ 的值域是 $\left[1,+\infty\right)$ 。

点评：求函数值域的常用方法是①根据解析式直接计算；②根据解析式和定义域观察分析；③根据函数图像观察分析。

【能力检测】

基础闯关

1．下列对应关系，不是集合 P 到 Q 的函数是(　　　)。



A．　　　　B．　　　　C．　　　　D。

2．下列函数中，定义域为 R 的是(　　)。

A． $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$　　B． $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　C． $f(x)=\sqrt{x}$　　D．$f(x)=3x^2-2x+1$

3．若 $f\left(x\right)=2x+1$ ，则 $f\left(-3\right)=$(　　)。

A． -5　　B． -4　　C． -3　　D． -2

4．若 $f(x)=3x^2$, $x\in\{-1,0,1,2\}$,则 $f\left(x\right)$ 的值域为(　　)。

A． $\{-3,3,12\}$　　B． $\{-3,0,3\}$　　C． $\{0,3,12\}$　　D． $\{-3,0,12\}$

5．若 $f\left(x\right)=2-3x$ ，则 $f\left(1\right)=$ ________________。

6．若 $f(x)=\sqrt{x}+1$, 则 $f\left(x\right)$ 的定义域为________________，值域为________________。

7．已知函数 $f(x)=2x^2-1$, 求 $f(0),f(3),f(-2),f(a)$ 。

8．求下列函数的值域：

(1) $f\left(x\right)=x+1$，$x\in\{-2,-1,0,1,2\}$　　(2) $f\left(x\right)=x+1,x\in\left[-2,2\right]$

(3) $f(x)=\frac{4}{x},x\in(0,+\infty)$

9．求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=x^3+1$　　(2) $f(x)=\sqrt{2x-3}$　　(3) $f(x)=\frac{2}{x-3}$

(4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$　　(5) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{x}$

能力提升

1．函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$ 的定义域为(　　)。

A．$\{x|x\neq0\}$　　B．$\{x|x\neq1\}$

C．$\{x|x\neq0或x\neq1\}$　　D．$\{x|x\neq0且x\neq1\}$

2．若 $f(x)=x^2+x+1,,则f(x+1)=($　　)。

A．$f(x)=x^2+3x+3$　　B．$f(x)=x^2+3x+2$

C．$f(x)=x^2+x+3$　　D．$f(x)=x^2+x+2$

3．若 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2},则f(x)$ 的定义域为：(　　)。

A．$\{x\,|\,x\leqslant1或x\geqslant2\}$　B．$\{x\,|\,x\leqslant1且x\geqslant2\}$　C．$\{x\,|\,x\leqslant1\}$　D$\{x\,|\,x\geqslant2\}$

4．若 $f(x)=\sqrt{1-|x-1|},则f(x)$ 的定义域为＿＿＿＿＿＿＿＿。

5．$f(x)=2x+1,,则f\left(x\right)$ 的值域为＿＿＿＿＿＿＿＿。

6．求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$　　(2) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$　　(3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2-x}}$

7．求下列函数的值域：

(1) $f(x)=x^2-2x+2$　　(2) $f(x)=x^2-2x+2,x\in[0,3]$

拓展训练

1．若 $f(2x)=2x^2+3$，求 $f\left(2\right)$ 的值。

2．已知 $f(x)=ax^2+bx+c,且f(1)=5,f(2)=12,f(-1)=9,求f(-2)$ 的值。

3．已知一个长为 4，宽为 3 的矩形，当长增加 x 时，宽减少 $\frac{x}{2}$，问当 x 取何值时，矩形面积最大，最大面积为多少？

3.1.2　函数的表示法

【知识回顾】

1．函数的三种表示方法：＿＿＿＿＿＿＿＿、＿＿＿＿＿＿＿＿、＿＿＿＿＿＿＿＿。

2．解析法：利用＿＿＿＿＿＿来表示＿＿＿＿＿＿的方法；优点是函数关系清楚，易求

出其对应的函数值，便于用解析式来研究函数的性质，缺点是不够形象、直观、具体，而且并不是所有的函数都能用解析法表示出来。

3．列表法：用____________来表示函数的方法；优点是不必通过计算就知道与自变量的值相对应的____________，缺点是只能表示自变量取较少的有限值的对应关系。

4．图像法：利用图像表示____________的方法；优点是能____________地表示函数的变化情况，缺点是只能近似的求出自变量的值所对应的函数值，而且有时误差较大。

5．“描点法”作函数图像步骤：①确定函数的定义域；②选自变量x的若干个值(一般选取某些有代表性的值)，计算出它们对应的____________，列出表格；③以表格中的x为__________，对应的______值为纵坐标，在直角坐标系中依次描出相应的点(x,y)；④根据题意确定是否将描出的点连接成光滑的曲线。

【典例分析】

例 1．某路公共汽车，行进的站数与票价关系如表 2-4 所列。

表 2-4

行进的站数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
票价(元)	0.5	0.5	0.5	1	1	1	1.5	1.5	1.5

此函数关系除了用列表法之外，能否用其他方法表示？

解：可以用图像法表示如图 2-5 所示。

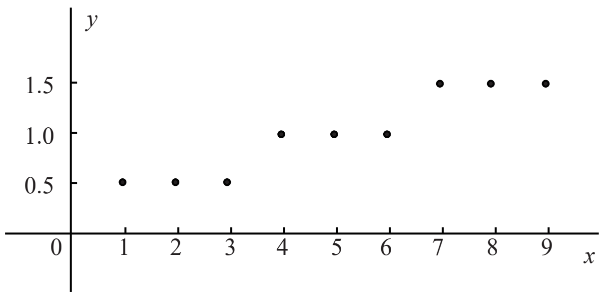


图 2-5

也可以用解析式表示为：$y=\begin{cases}0.5, & x\in\{1,2,3\}\\ 1, & x\in\{4,5,6\}\\ 1.5, & x\in\{7,8,9\}\end{cases}$

点评　函数的三种表示法可以相互转化，画图像或用解析法表示函数时，注意函数的定义域。

【能力检测】

基础闯关

1．在函数$f(x)=2x+1$的图像上的点是(　　　　)。

A．$(-1,0)$　　B．$(-1,1)$　　C．$(0,1)$　　D．$(1,2)$

2．设函数$f(x)=kx+b$，若$f(1)=-2, f(-1)=0$，则$k=$_______，$b=$__________。

3．若点 $\left(-2,y\right)$ 在常数函数 $f\left(x\right)=3$ 的图像上，则 $y=$__________。

4．已知一次函数的图像经过点 $A(0，3)$和 $B(-2,0)$,求这个函数的解析式，并判断图像经过哪几个象限？

5．画出函数 $y=3x-1,x\in\left[1,2\right]$ 的图像。

能力提升

1．一旅馆有 100 间相同的客房，经过一段时间的经营实践，发现每间客房的定价与住房率有如表 2-5 关系：

表 2-5

每间房定价	100 元	90 元	80 元	60 元
住房率	65%	75%	85%	95%

要使每天的收入最高，每间房定价应为(　　　　)。

A．100元　　B．90元　　C．80元　　D．60元

2．下列图像中，不是以 x 为自变量的函数图像是(　　　)，其函数图像如图 2-6 所示。

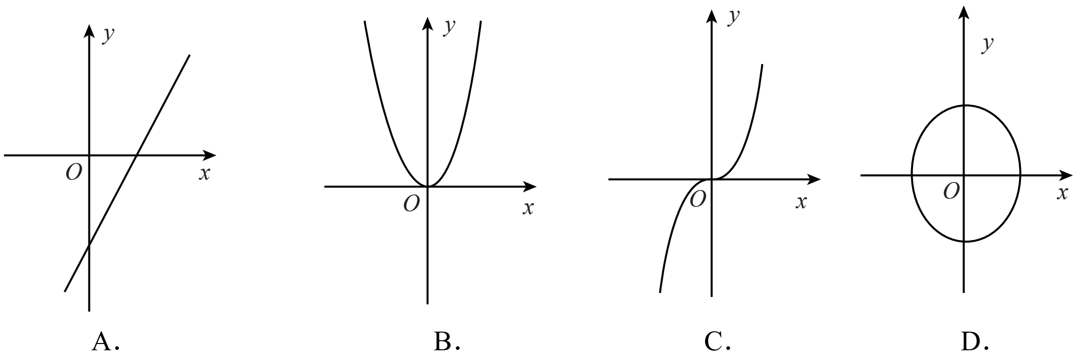


图 2-6

3．作出下列函数的图像：

(1) $f\left(x\right)=2x,x\in Z,且\left|x\right|\leqslant 2$　(2) $y=2x^2-4x,x\in\left[0,3\right]$

拓展训练

1．某自来水公司为鼓励居民节约用水制定了如图 2-7 所示的用水

收费标准，若用水 12 吨，则应缴水费__________元。

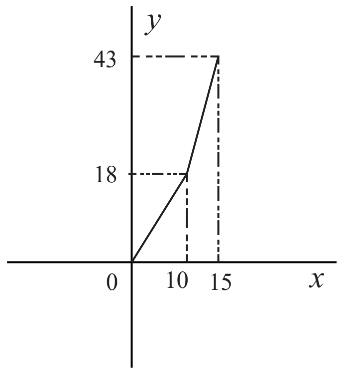
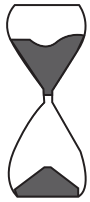
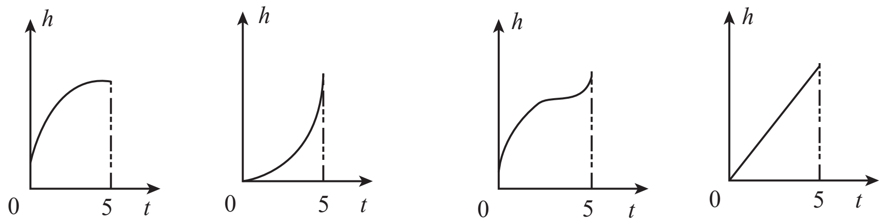


图 2-7

2．如图 2-8 所示，现有一个计时沙漏，开始时盛满沙子，沙子从上部均匀漏下，经过 5 分钟漏完，h 是该沙漏中沙面下降的高度，则 h 与下落时间 t (分)的函数关系式用图像表示应该是(　)，如图 2-9 所示。





A.　　B.　　C.　　D.

图 2-8　　图 2-9

3．已知某人 1 至 6 月份的月经济收入如下：

1 月份为 1000 元，从 2 月份起每月的月收入是其上一个月的 2 倍，用表格、图像、解析式三种形式表示该人 1 至 6 月份的月经济收入 y (元)与月份序号 x 的函数关系，并指出函数的定义域、值域。

3.2　函数的性质

3.2.1　函数的单调性

【知识回顾】

1．函数单调性的概念：函数值随着________而增大(或减小)的性质叫做函数的单调性。

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有意义，如果对任意的__________________，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)$ _____ $f(x_2)$ 成立，那么，函数 $f(x)$ 叫做函数在区间 (a,b) 内的增函数，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的________区间。

如果对任意的__________________，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)$ _____ $f(x_2)$ 成立，那么，函数 $f(x)$ 叫做函数在区间 (a,b) 内的减函数，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的________区间。

2．单调区间：如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是增函数(或减函数)，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有______________，区间____________叫做函数 $f(x)$ 的单调区间。

3．函数 $f(x)$ 在其单调增区间上的图像是_______，在其单调减区间上的图像是________。 单调函数的图像特征，如图 2-10 和图 2-11 所示。

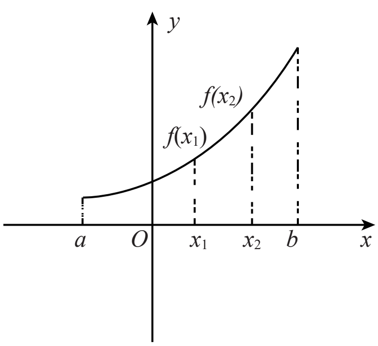


图 2-10

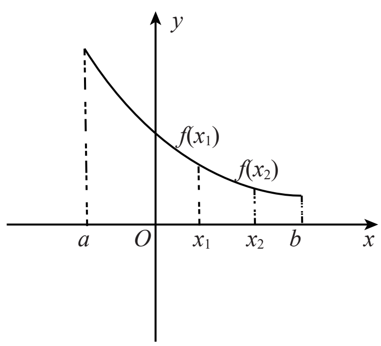


图 2-11

【典例分析】

例 1．判断函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内的单调性。

解：任取 x_1、$x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则有

$$y_1-y_2=\frac{1}{x_2-1}-\frac{1}{x_1-1}=\frac{x_1-x_2}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

$\because\quad x_1$、$x_2\in(1,+\infty)$且$x_1<x_2$

$\therefore\quad x_1-x_2<0, x_1-1>0, x_2-1>0$

故 $y_1-y_2<0$，即 $y_1<y_2$，所以函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内是单调递增函数。

点评　用定义判断函数单调性的步骤：“一取”“二差”“三判”，即①任取定义域的两个自变量 $x_1<x_2$；②作差 $f(x_1)-f(x_2)$；③判断当 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 时，函数 $f(x)$ 为增函数；当 $f(x_1)-f(x_2)>0$ 时，函数 $f(x)$ 为减函数。

例 2．求函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的减区间。

解：解不等式 $x^2+2x-3\geqslant 0$

得　　　$x\leqslant -3$或$x\geqslant 1$

故函数的定义域为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$；由于二次函数 $f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$ 的减区间为 $(-\infty,-1)$，故函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的减区间为 $(-\infty,-3]$。

点评：函数的单调区间必须是定义域的子集。

【能力检测】

基础闯关

1．下列函数中，$x\in R$，当 x 增大时，y 的值增大的函数是(　　　)。

A．$y=2x+1$　　B．$y=-3x+2$　　C．$y=-x^2$　　D．$y=2x^2-1$

2．下列函数在 R 上为减函数的是(　　　)。

A．$y=-\dfrac{1}{x}$　　B．$y=-x^2$　　C．$y=-5x+1$　　D．$y=2x^2+3$

3．函数 $y=\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$　(　　　)。

A．是增函数　B．在 $(0,+\infty)$ 是减函数 C．在 $(0,+\infty)$ 上是增函数　D．是正比例函数

4．函数 $f(x)=x^2+4x-1$ 的增区间是____________，减区间是____________。

5．若函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(1)$ 与 $f(2)$ 的大小关系是 $f(1)$__$f(2)$。

6．函数 $y=f(x), x\in[-1,4]$ 的图像，在区间______________上是增函数，在区间____________是减函数，函数的最大值是_______，最小值是_________。

能力提升

1．求证：当 $k>0$ 时，一次函数 $f\left(x\right)=kx+b$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上是增函数。

2．求函数 $y=-x^2+2x$ 的最大值，并指出它在哪个区间上是减函数。

拓展训练

1．给出下列命题：

① $y=\dfrac{1}{x}$ 在定义域内为减函数；② $y=\left(x-1\right)^2$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数；③ $y=-\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上是增函数；④ $y=kx\left(x\neq 0\right)$ 不是增函数就是减函数，其中错误的命题有______________。

2． 函数 $f\left(x\right)=x^2+2\left(b-1\right)x+2$ 在区间 $\left(-\infty,2\right]$ 上是减函数，则 b 的取值范围是(　　　)。

A． $b\geqslant 3$　　B． $b\leqslant 3$　　C． $b\leqslant -3$　　D． $b\geqslant -3$

3．函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上是增函数，则有(　　　)。

A． $f\left(a\right)<f\left(2a\right)$　B． $f\left(a^2\right)<f\left(a\right)$　C． $f\left(a^2+1\right)>f\left(a\right)$　D． $f\left(a^2+1\right)<f\left(a\right)$

3.2.2　函数的奇偶性

【知识回顾】

1．对称点：一般地，设点 $P(a,b)$ 为平面内的任意一点，则有：

(1) 点 $P(a,b)$ 关于 x 轴的对称点的坐标为__________________；

(2) 点 $P(a,b)$ 关于 y 轴的对称点的坐标为__________________；

(3) 点 $P(a,b)$ 关于原点的对称点的坐标为__________________。

2．函数奇偶性的定义：设函数的定义域为数集 D，

(1) 如果对于任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，并且 $f\left(-x\right)=$__________，那么函数 $f\left(x\right)$ 叫做偶函数，其图像关于________对称，如图 2-12 所示。

(2)如果对于任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，并且 $f\left(-x\right)=$__________，那么函数 $f\left(x\right)$ 叫做奇函数，其图像关于________对称，如图 2-13 所示。

如果一个函数是奇函数或偶函数，那么，就说这个函数具有____________，不具有奇偶性的函数叫做___________________。

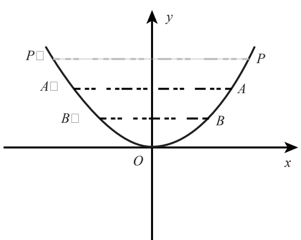


图 2-12

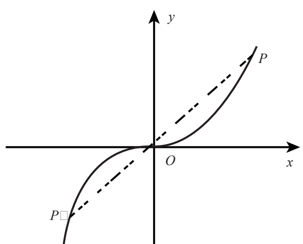


图 2-13

【典例分析】

例 1．如果奇函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[3,7\right]$ 上增函数且最小值为 5，那么 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-7,-3\right]$ 是(　　)。

A．增函数且最小值为−5　　　　B．增函数且最大值为−5

C．减函数且最小值为−5　　　　D．减函数且最大值为−5

解：利用函数的奇偶性、单调性的图像特征，画出符合题意的示意图，如图 2-14 所示。

通过观察，可知奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-7,-3\right]$ 上是增函数，且最大值为−5。

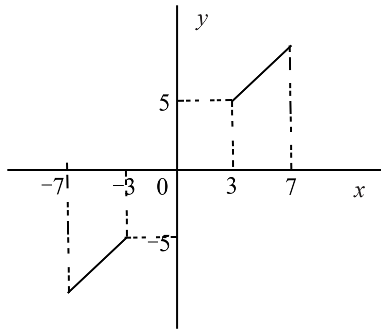


图 2-14

因此，应选 B。

点评：数形结合思想是数学问题得以解决的直观性思想。

例 2．判断函数 $g\left(x\right)=2x^2-x$ 的奇偶性。

解：函数 $g\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-\infty,+\infty\right)$，对任意的 $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$ 都有 $-x\in\left(-\infty,+\infty\right)$，

$g\left(x\right)=2x^2-x$， $g\left(-x\right)=2\left(-x\right)^2-\left(-x\right)=2x^2+x$， $-g\left(x\right)=-2x^2+x$，

即　$g\left(x\right)\neq g\left(-x\right)$ 且 $g\left(-x\right)\neq -g\left(x\right)$，

故函数 $g\left(x\right)=2x^2-x$ 是非奇非偶函数。

点评：判断函数奇偶性的步骤：“一求”“二判”“三算”“四论”，即

①求出函数的定义域；②判断：对任意的 $x\in D$，是否都有 $-x\in D$，若存在某个 $x_0\in D$，但 $-x_0\notin D$，则该函数肯定是非奇非偶函数；③分别计算出 $f\left(x\right)$ 与 $f\left(-x\right)$。④下结论：若 $f(x)=f(-x)$，则函数为偶函数；若 $f(x)=-f(x)$，则函数为奇函数；若 $f(x)\neq f(-x)$ 且 $f(x)\neq -f(x)$，则函数为非奇非偶函数。

【能力检测】

基础闯关

1．点 $P\left(-2,3\right)$ 关于 X 轴的对称点是(　　　)，关于原点的对称点是(　　　)。

A．(2，−3)，(−2，−3)　　B．(−2，−3)，(2，−3)

C．(-2，3)，(-3，-2)　　D．(-2，3)，(-2，-3)

2．下列函数中，是偶函数的是(　　　)。

A． $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-x^2}$　B． $f\left(x\right)=2x-1$　C． $f\left(x\right)=\sqrt{x}$　D． $f\left(x\right)=x^2,x\in\left(-1,1\right]$

3．函数 $y=x^3$ 的奇偶性是____________。

4．若 $f\left(x\right)$ 是奇函数，且 $f\left(-1\right)=4$，则 $f\left(1\right)=$____________。

5．既是奇函数，又是偶函数的函数是____________________。

6．根据下列函数的图像判断函数的奇偶性，如图 2-15 所示。

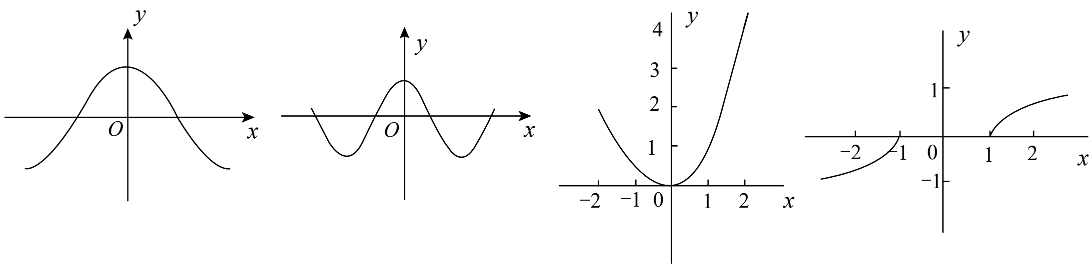


图 2-15

能力提升

1. 已知定义域为 R 的奇函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-3,1\right]$ 上是增函数，且最小值为 -5，那么 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,3\right]$ 是(　　)。

A．增函数且最小值为5　　B．增函数且最大值为5

C．减函数且最小值为5　　D．减函数且最大值为5

2．如图 2-16 所示，给出了偶函数 $f\left(x\right)$ 的局部图像，比较大小：$f\left(-1\right)$______$f\left(-3\right)$

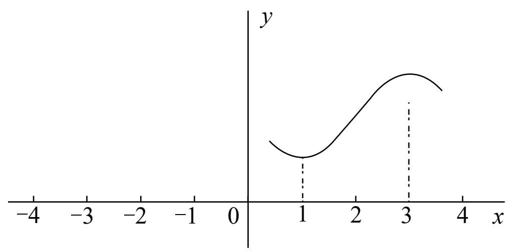


图 2-16

3．若函数 $f\left(x\right)=3x+m-1$ 是奇函数，则常数 $m=$__________。

4．已知函数 $f\left(x\right)=3x-\dfrac{2}{x}$，判断函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性。

拓展训练

1. 已知定义域为 R 的偶函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,+\infty\right)$ 上为增函数，则 $f\left(-4\right),f\left(-2\right),f\left(3\right)$ 之间的大小关系是__________________。

2．设函数 $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^2+2mx+3$ 是偶函数，则它在(　　)。

A．区间 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 是增函数　　B．区间 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 是减函数

C．区间 $\left(0,+\infty\right)$ 是增函数　　D．区间 $\left(-\infty,0\right)$ 是增函数

3.3　函数的实际应用举例

【知识回顾】

1．分段函数的概念：在自变量的不同取值范围内，用__________________来表示的函数叫做分段函数。

2．分段函数的定义域是自变量的各个不同取值范围的_______集。

【典例分析】

例．某城市出租车的收费方法是起步价 6 元，可行 3km(含 3km)，3km 后到 10km(含 10km)每走 1km 加价 0.8 元，10km 后每走 1km 加价 1 元。

(1) 写出车费 y 元与出租车行驶路程 x km 的函数关系式；

(2) 画出该函数的图像；

(3) 若某人坐出租车走了 12km，他应付的费用是多少元？

解：(1)当路程不超过 3km，解析式为 $y=6$ (元)；当路程超过 3km 但不超过 10km，解析式为 $y=6+\left(x-3\right)\times 0.8$ (元)；当路程超过 10km，解析式为 $y=6+7\times 0.8+\left(x-10\right)\times 1$ (元)；

所以，函数的解析式为 $y=\begin{cases}6 & 0<x\leqslant 3\\ 0.8x+3.6 & 3<x\leqslant 10\\ x+1.6 & x>10\end{cases}$。

(2) 函数的图像如图 2-17 所示。

(3)当某人坐出租车走了 12km，此时 $x>10$，故他应付的车费为 $y=12+1.6=13.6$ (元)。

点评：① 分段函数图像的作法，明确分段函数由几个部分组成，在同一坐标系中，分别在自变量的各个取值范围内，根据相应的式子作出相应的图像，特别注意定义域端点是否可取。

② 求分段函数的其中某个函数值，要注意自变量所在的取值区域。

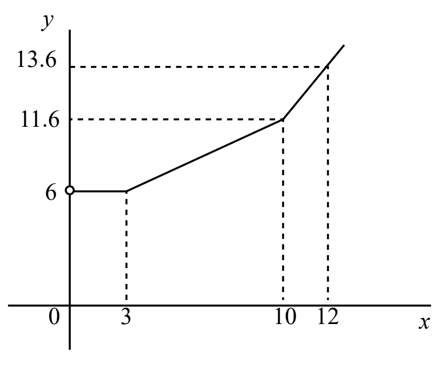


图 2-17

【能力检测】

基础闯关

1．若矩形的长比宽多 3m，则矩形的面积 $y(\text{m}^2)$ 与长 $x(\text{m})$ 的关系是(　　　)。

A．$y=3x$　　B．$y=x(x+3)$　　C．$y=x(x-3)$　　D．$y=x^2$

2．抛物线 $y=\left(x-2\right)^2+1$ 的顶点坐标是(　　　)。

A．$\left(1,2\right)$　　B．$\left(2,1\right)$　　C．$\left(-2,1\right)$　　D．$\left(0,1\right)$

3．设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<-2\\ 2, & -2\leqslant x<0\\ 2x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 的定义域是(　　)。

A．$(-\infty,-2)$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$(-\infty,+\infty)$　　D．以上都不对

4．设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x^3+1, & x>0\end{cases}$，则 $f(2)=$________，$f(-2)=$________。

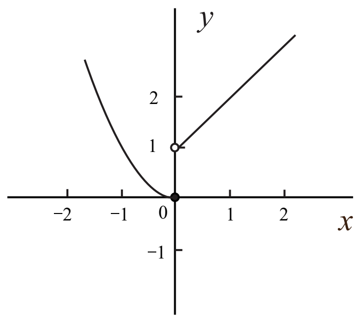
5．设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，则 $f(1)+f(-1)=$________。

6．已知点 $A(1,3),B(x,9)$ 是正比例函数 $y=kx$ 图像上的点，则点 B 的坐标是________。

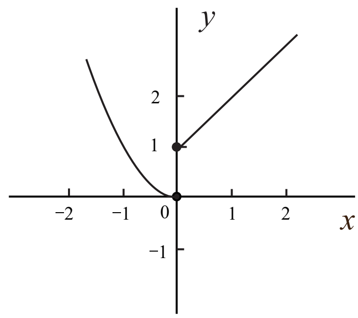
7．某种商品零售价为每件 1.5 元；20 件以上(含 20 件)可以享受批发价，批发价为每件 1.2 元；100 件以上(含 100 件)可以享受优惠批发价，优惠批发价为每件 0.9 元。写出购买该商品件数和应付款数的函数解析式。

能力提升

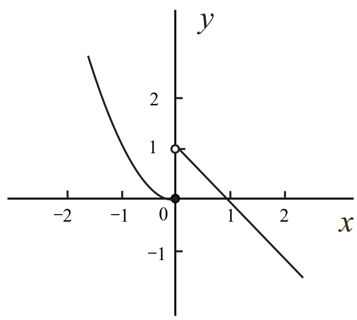
1．函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 的图像大致为(　　)，如图 2-18 所示。



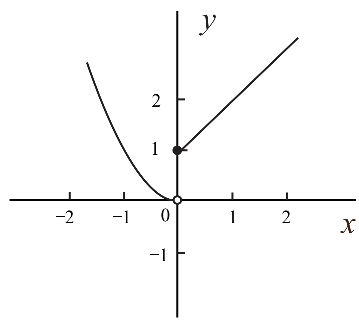
A.



B.



C.



D.

图 2-18

2．已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\mid 2x+y=5\}$，则 $M\cap N=$(　　)。

A．$\{(3,-1)\}$　　B．$\{3\}\cup\{-1\}$　　C．$\{3,-1\}$　　D．$(3,-1)$

3．函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & x<-1\\ 2+x, & -1\leqslant x<2\\ 3x, & x\geqslant 2\end{cases}$ 的定义域是________，$f\left(3\right)-f\left(-2\right)+f\left(1\right)=$______。

4．某移动通信公司，开设了两种通信业务："全球通"使用者先缴纳 30 元/月基础话费，然后每通话一分钟，再付电话费 0.15 元；"神州行"不缴月基础费，每通话一分钟，付话费 0.3 元，若一个月内通话 x 分钟，两种通信方式的费用分别为 y_1 元和 y_2 元。

(1) 写出 y_1 和 y_2 与 x 之间的函数关系式。

(2) 使用者选择哪种通信方式比较合算？为什么？

拓展训练

1．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2 & (x>0)\\ 1 & (x=0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$，(1)画出函数的图像；(2)根据已知条件分别求 $f\left(1\right), f\left(-3\right), f\left[f\left(-3\right)\right]$ 的值。

2．将进货单价为 8 元的商品按 10 元一个销售时，每天可卖出 100 个，若这种商品的销售价每上涨 1 元，则日常销量就减少 10 个，为了获取最大利润，此商品的销售价应定为多少元？

测试题

一、选择题（共32分）

1．奇函数图像关于(　　)对称，偶函数图像关于(　　　)对称。

A．原点，Y轴　　B．Y轴，原点　　C．X轴，原点　　D．原点，X轴

2．点 $P(-2，3)$关于 X 轴的对称点是(　　　)，关于原点的对称点是(　　　)。

A．(−2，−3)，(2，−3)　　B．(2，−3)，(−2，−3)

C．(−2，3)，(−3，−2)　　D．(−2，3)，(−2，−3)

3．下列各组的两个函数，表示同一个函数的是(　　)。

A．x　　B．y　　C．x　　D．x

4．已知函数 f，则 $y=$(　　　)。

A．1　　B．2　　C．x　　D．y

5．函数 x　的增区间是(　　　)。

A．$y=f(x),(x\in D)$　　B．$x=x_0$　　C．$y=f(x)$　　D．y_0

6．设点 y 为奇函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$ 图像上的点，则下列各点在函数图像上的是(　　)。

A．$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$　　B．$\sqrt{x+1}$　　C．$x+1\geq 0$　　D．$\dfrac{1}{2-x}$

7．下列函数中既是奇函数又是增函数的是(　　)。

A．$2-x\neq 0$　B．$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\2-x\neq 0\end{cases}$　C．$x\geqslant -1且x\neq 2$　D．$f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$

8．已知函数$\{x\mid x\geq -1且x\neq 2\}$，则$[-1,2)\cup(2,+\infty)=($　　　$)$。

A．$\sqrt{x-2}$　B．$x-2\geq 0$　C．$\sqrt{2-x}$　D．$2-x\geq 0$

二、填空题（共16分）

1．一次函数$\begin{cases}x-2\geqslant 0\\2-x\leqslant 0\end{cases}$的图像经过点$\begin{cases}x\geqslant 2\\x\leqslant 2\end{cases}$和$x=2$，则此一次函数的解式为______________________。

2．函数$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$，$\{x\mid x=2\}$的值域是______________________。

3．函数$f(x)=2x-1,x\in\{1,2,3\}$的定义域是________________。

4．已知定义域为R的偶函数$y=2x-1,x\in(1,3)$在区间$y=\sqrt{x}+1$上为增函数，那么$\because f(1)=2\times 1-1=1$之间的大小关系是__________________。

三、解答题（共52分）

1．设函数$f(2)=2\times 2-1=3$，求$f(3)=2\times 3-1=5$的值。

2．求函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$的定义域。

3．判断函数$f(x)=2x-1$在区间(1，$\{1,3,5\}$)内的单调性。

4．判断函数$y=2x-1,x\in(1,3)$的奇偶性。

5．设$y=2x-1,x\in(1,3)$，(1)写出函数的定义域

(2)求$(1,5)$的值　(3)作出函数$\because\sqrt{x}\geqslant 0$的图像。

6．某工厂生产一种产品的总利润L(元)是产量X(件)的二次函数：$L=x^2+2000x-10000,0<x<1900$。试问：产量是多少时总利润最大？最大利润是多少？

第 4 章　指数函数与对数函数

4.1　实数指数幂

4.1.1　分数指数幂

【知识回顾】

1．n次方根：一般地，如果$x^n=a$(____________)，那么，____叫做a的n次方根。

(1) 当n为奇数时，实数a的n次方根有_____个，记作___________。

(2) 当n为偶数时，实数a的n次方根有______个，分别用_________和_____表示，其中_________叫做a的n次算术根；负数的n次方根______。

(3) 零的n次方根都是_____。

2．n次根式：$a^n=$_________，形如______($n\in N$且$n>1$)的式子叫做a的n次根式，其中a叫做______，n叫做_________。

3．当n为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=$______，当n为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}\quad(a\geqslant 0)\\ \quad(a<0)\end{cases}$

4．整数指数幂：当$n\in N^*, a\neq 0$时，$a^0=$_____，$a^{-n}=$______。

5．分数指数幂：利用分数指数幂来表示根式，规定：(1) $a^{\frac{m}{n}}=$_______，其中$m,n\in N^*$且$n>1$。当n为奇数时，$a\in R$，当n为偶数时，a__0(大小关系)。(2)当有意义，且$a\neq 0$时，规定：$a^{-\frac{m}{n}}=$____。

【典例分析】

例 1．将下列根式写成分数指数幂的形式。

(1) $\sqrt[7]{3^5}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{16}}$

解：(1) $\sqrt[7]{3^5}=3^{\frac{5}{7}}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}=(\dfrac{5}{3})^{\frac{1}{2}}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}=\dfrac{1}{a^{\frac{4}{5}}}=a^{-\frac{4}{5}}$　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{16}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^4}}=\dfrac{1}{2^{\frac{4}{5}}}=2^{-\frac{4}{5}}$

例 2．求值：

(1) $27^{\frac{2}{3}}$　　(2) $(-8)^{-\frac{2}{3}}$　　(3) $2\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{4}$　　(4) $(\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}})^2\times\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}\times(\dfrac{2}{3})^{-\frac{5}{12}}$

解：(1) $27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\times\frac{2}{3}}=3^2=9$

(2) $(-8)^{-\frac{2}{3}}=\left[(-2)^3\right]^{-\frac{2}{3}}=(-2)^{3\times(-\frac{2}{3})}=(-2)^{-2}=\dfrac{1}{(-2)^2}=\dfrac{1}{4}$

(3) $2\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{4}=2^{1}\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{2}{8}}=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=2^{2}=4$

(4) $(\sqrt[3]{\frac{2}{3}})^{2}\times\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\times(\frac{2}{3})^{-\frac{5}{12}}=(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}}\times(\frac{2}{3})^{-\frac{1}{4}}\times(\frac{2}{3})^{-\frac{5}{12}}=(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}}=(\frac{2}{3})^{0}=1$

点评：利用分数指数幂进行根式运算，其顺序是先把根式化为分数指数幂，再根据幂的运算性质进行计算。

【能力检测】

基础闯关

1．$(-3)^{0}$ 的值等于(　　)。

A．-3　　B．0　　C．1　　D．3

2．$(\frac{1}{3})^{4}$ 的值等于(　　)。

A．-81　　B．$-\frac{1}{64}$　　C．$\frac{1}{64}$　　D．$\frac{1}{81}$

3．$x^{3}x$ 的值等于(　　)。

A．x^{2}　　B．x^{3}　　C．x^{4}　　D．x^{5}

4．$(-2x^{3})^{2}=$________；$x^{2}\cdot x^{-3}=$__________。

5．$\sqrt{16}=$______；$\sqrt[3]{-8}=$______；$\sqrt{(-3)^{4}}=$______。

能力提升

1．-2^{3} 的值是(　　)。

A．-6　　B．6　　C．-8　　D．8

2．8的三次方根是(　　)。

A．±4　　B．±2　　C．2　　D．-2

3．$(-x^{3})^{2}\div(-x)^{2}=$________；$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\div\sqrt[8]{2}=$__________。

4．计算下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3})^{2}+(\frac{1}{2})^{-2}-1^{-1}$　　　(2) $(-\frac{b}{2a})^{2}\times(\frac{a^{2}}{b})(ab)^{2}$

拓展延伸

1．设 $2^{x-1}=m,2^{y-1}=n$，则 $2^{x+y}=$(　　)。

A．mn　　B．$4mn$　　C．$\frac{mn}{4}$　　D．$m+n$

2．化简 $\sqrt{a^{2}-4a+4}(a<2)$

4.1.2　实数指数幂及其运算法则

【知识回顾】

1．有理数幂运算法则：当$a>0, p$、q为有理数时，有$a^p\cdot a^q=$______，$\left(a^p\right)^q=$______，$\left(ab\right)^p=$____。当p、q为实数时，该运算法则也适用，所以该也叫做实数指数幂的运算法则。

2．实数指数幂的运算法则成立的条件是________________________________。

【典例分析】

例 1．(1) 若$10^{2x}=16$，则$10^{-x}=$________。

(2) 设$x^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{3}{2}}$，则$x=$________。

解：(1)$10^{-x}=10^{2x\cdot(-\frac{1}{2})}=(10^{2x})^{-\frac{1}{2}}=16^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

(2) 由于$5^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{4}}=25^{\frac{3}{4}}$，故$x^{\frac{3}{4}}=25^{\frac{3}{4}}$，因此$x=25$。

点评：本题主要考查有理数指数幂的概念，利用幂的运算法则，将两个相等的幂化成同底或同指数，从而确定相应字母的值是解决这类问题的主要方法。

例 2．化简：$(-2x^{\frac{1}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{3}})\cdot(3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}})^2\cdot(-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}})$。

解：$(-2x^{\frac{1}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{3}})\cdot(3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}})^2\cdot(-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}})=(-2)\times3^2\times(-4)x^{\frac{1}{4}}\cdot(x^{-\frac{1}{2}})^2\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}\cdot(y^{\frac{1}{3}})^2\cdot y^{\frac{2}{3}}$

$=72x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=72x^0y^1=72y$

点评：化简要遵循运算顺序，先进行幂运算，然后进行乘除运算，最后分别进行系数与同底数幂的运算。

【能力检测】

基础闯关

1．下列运算中，正确的是(　　　)。

A．$2^{-\frac{3}{5}}\cdot2^{\frac{3}{5}}=0$　　B．$2^{\frac{3}{5}}\cdot2^5=8$　　C．$(2^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}}=2$　　D．$2^{\frac{3}{5}}\div2^{\frac{5}{3}}=2$

2．下列结论错误的是(　　　)。

A．$(\sqrt[n]{a})^n=a(n\text{为奇数})$　　B．$\frac{1}{a^n}=a^{-n}(a\neq0,n\in N^*)$

C．$a^0=1$　　D．$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}(a\neq0,m,n\in N)$

3．计算下列各式：

(1) $(2\frac{7}{9})^{\frac{3}{2}}=$________　　(2) $(\frac{3}{4}x)^{-2}(\frac{1}{4}x^5)^2=$________

(3) $\sqrt[4]{(-2)^2}=$________　　(4) $\sqrt[4]{16\times\sqrt{81}}=$________

4．已知 $x>0, x^{-1}=4$，那么 $x=$______。

能力提升

1．若 $x<0$，则 $|x|+\sqrt{x^2}+\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ 等于(　　)。

A．1　　B．-1　　C．$1+2x$　　D．$1-2x$

2．下列等式中，错误的是(　　)。

A．$3^x\cdot 2^x=6^x$　　B．$(\dfrac{1}{5})^{a-b}=\dfrac{5^a}{5^b}$　　C．$16^x=(4^x)^2$　　D．$\sqrt{5\sqrt{5}}=5^{\frac{3}{4}}$

3．化简下列各式：

(1) $(a^6\cdot b^{-9})^{\frac{2}{3}}$　　(2) $(\dfrac{4}{25})^{\frac{1}{2}}+(-2)^0+(0.008)^{-\frac{1}{3}}$

(3) $\dfrac{-15a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{1}{4}}}{25a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot c^{-\frac{3}{4}}}$　　(4) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})\div(a-b)$

拓展延伸

1． $a,b\in R$，下列各式恒成立的是(　　)。

A． $\sqrt{(a^2+b^2)^2}=a^2+b^2$　　B． $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$

C． $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3=a+b$　　D． $\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[4]{b^4}=a-b$

2．已知 $\sqrt{4x-1}+|y-8x|=0$，求 $\sqrt[4]{x^y}$ 的值。

4.1.3　幂函数举例

【知识回顾】

1．幂函数：一般地，形如______的函数叫做幂函数，其中_____为常数，______为自变量，幂函数的定义域是使得__________的一切实数。

2．幂函数的图像特点：当 $a>0$ 时，函数图像经过原点____和点___；当 $a<0$ 时，函数图像经过点_____，但不经过原点 $(0,0)$。

3．幂函数性质：当 $a>0$ 时，函数在区间______上是增函数；当 $a<0$ 时，函数在 $(0,+\infty)$ 上是____函数。

【能力检测】

基础闯关

1．下列函数为幂函数的是(　　)。

A． $y=x^{-2}$　　B． $y=-2x^2$　　C． $y=2x^3$　　D． $y=3^x$

2．已知 $x^{\frac{1}{2}}=2$，则 x 等于( )。

A．±4　　B．4　　C．±2　　D．2

3．函数 $y=x^{-\frac{2}{3}}$ 的定义域是___________。

能力提升

1．幂函数的所有图像都经过点_________。

2．函数 $y=x^{-2}$ 的定义域为____________，其图像关于_______对称，它在区间 $(0,+\infty)$ 内为_____(填“增或减”)函数。

3．若 $5^x=9$，求 $(5^x)^{-\frac{1}{2}}$ 的值。

拓展延伸

已知函数 $f(x)=x^n$，且它的图像经过点 $(4,16)$，求 $f(-3)$ 的值。

4.2　指数函数

4.2.1　指数函数及其图像与性质

【知识回顾】

1．一般的，形如____________________的函数叫指数函数。指数函数的定义域为___________；值域为____________。

2．指数函数 $y=a^x$ ($a>0$且$a\neq1$)，当 $x=0$ 时，函数值 $y=$____________。

3．当 $a>1$时，函数$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$在$(-\infty,+\infty)$内是________________；当 $0<a<1$ 时，函数$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$在$(-\infty,+\infty)$内是____________________。

【典例分析】

例 1．判断下列函数在$(-\infty,+\infty)$内的单调性：

(1) $y=2^x$　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

解 (1) 因为底$a=2>1$，所以 $y=2^x$在$(-\infty,+\infty)$内是增函数。

(2) 因为底$a=\frac{1}{3}<1$ ，所以 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是减函数。

例 2．求函数 $y=\sqrt{3^x-81}$ 的定义域。

解　要使得根式有意义，则需要被开方数非负，故$3^x-81\geqslant0$ ，即$3^x\geqslant81$。考虑指数函数 $y=3^x$ 为增函数，且 $81=3^4$，故有 $x\geqslant4$。即函数的定义域为$[4,+\infty]$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列函数为指数函数的是(　　　)。

A．$y=x^2$　　B．$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　C．$y=(-2)^x$　　D．$y=3x$

2．已知$\left(\frac{1}{4}\right)^a>\left(\frac{1}{4}\right)^b$，则下列正确的是(　　　)。

A．$a<b$　　B．$a>b$　　C．$a=b$　　D．$a\geqslant b$

3．已知指数函数 $y=a^x$ 的图像过点$(-2，4)$，则其解析式为(　　　)。

A．$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$　　B．$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$　　C．$y=2^x$　　D．$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

二、填空题

1．函数 $y=2^{-x}$ 与 $y=2^x$ 图像关于__________轴对称；

2．比较三个数 3^2，$\left(-\frac{1}{3}\right)^0$，$3^{\frac{1}{2}}$ 的大小______________。

三、解答题

1．判断下列函数在$(-\infty,+\infty)$内的单调性：

(1) $y=0.7^x$　　(2) $y=4^{\frac{x}{2}}$

能力提升

2．求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{5}{3^x-1}$　　(2) $\sqrt{2^x-8}$

拓展训练

某超市去年总收入为 a 亿元，如果今后每年平均增长率为 $b\%$，求 x 年后该超市的总收入。

4.2.2　指数函数应用举例

【知识回顾】

1．一般地,关于银行储蓄本利和的计算问题,本利和随存期 x 变化的函数解析式 $y=$________________。

2．一般地:如果原来产值基础数为 N，平均增长率为 p，则对于时间 x 的总产值 y，可以用公式表示为 $y=$________________。

【典例分析】

例 1．某市现有人口总数约 380 万人，如果年自然增长率为 1.2%，(1)写出该市人口总数 y(万人)与年份 x（年)的函数关系式；(2)计算 10 年以后该市人口总数(精确到 0.1 万人)。

解：（1）$y=380\times(1+1.2\%)x$　($x\in N*$)。

（2）$y=380\times(1+1.2\%)10\approx428.1$(万人)。

例 2．某顾客购买一台售价为 5000 元的戴尔 15R−758 笔记本电脑时，如果采用分期付款，总共分六次，在一年内将款全部还清。月利率为 0.8%，每月利息按复利计算，每次应付款多少元？

解：(1) 电脑购买 1 个月，该电脑售价增值为：

$5000+5000\times0.8\%=5000\times1.008$

2 个月后为：$5000\times1.008\times(1+0.008)=5000\times1.008^{2}$

……

12 个月后为：　5000×1.0081^{2}

(2) 假设每期付款 x 元，则：

第 1 期付款 x 元(即购买电脑后 2 个月)，增值为：　$1.008^{10}x$，

第 2 期付款 x 元(即购买电脑后 4 个月)，增值为：　$1.008^{8}x$，

……

所付的款额到全部付清时增值为：

$x+1.008^{2}x+1.008^{4}x+\cdots+1.008^{10}x=5000\times1.008^{12}$

$x\approx880.8$(元)。

所以,每次付款为 880.8 元，6 次所付款额为 $880.8\times6=5285$ 元，它比一次性付款多付 285 元。

点评：用函数解决应用题的解题步骤：

审题 → 数学模型 → 求模 → 还原

① 审题，弄清题意,分清条件和结论,理清数量关系；

② 建模，将文字语言转化为数学语言,利用数学知识建立相应的数学模型；

③ 求模，求解数学模型,得到数学结论；

④ 还原，数学问题的解向实际问题还原。

【能力检测】

基础闯关

1．某化工集团今年生产化肥 a 万吨，在今后的 8 年内，计划使年产量平均每年比上一年增加 $P\%$。写出年产量 y(吨)随经过年数×变化的函数关系式。若今年产量为 20 万吨，计划每年增长率为 6%，求 4 年后的产量(精确到 0.1 万吨)。

2．若某种储蓄按复利计算利率，本金为 a 元，每期利率为 r，设本利和为 y，存期为 x，写出本利和随存期 x 变化的函数解析式，如果存入本金 10000 元，每期利率为 4%，试计算 5 期后的本利和是多少（精确到 0.01)。

能力提升

1．某新仪器设备价值为 200 万元，按每年 5%的折旧率折旧，问 10 年后这台设备还值多少万元（精确到 0.01 万元）？

2．覃某因购房资金不足，决定向银行贷款 20 万元，采用按月等额本息方式 5 年还清贷款，若年利息为 5.225%，则每月需要还款多少元？（精确到 0.1 元）

拓展训练

据报道，伯尔尼（瑞士首都）的一位贫民在整理家族遗物时发现了一本 439 年前的旧存折，存折里当时存的仅是一法郎，第二天他拿这本存折到瑞士银行取钱，如果银行的年利率为 3.2%，按照复利（一种计算利息的方法，即把前一期的利息和本金加在一起算做本金，再计算下一期的利息）的形式算，同学们想一想现在存折里有多少法郎？

4.3　对数

4.3.1　对数的概念

【知识回顾】

1．对数定义：一般地，如果 $a\left(a>0,a\neq1\right)$ 的 b 次幂等于 $N(N>0)$，就是 $a^b=N$，那么数 b 叫做________________，记作 $\log_a N=b$，a 叫做对数的______，N 叫做____。

2．对数的性质

⑴__________没有对数(∵在指数式中 $N>0$)

⑵ $\log_a 1=$________，$\log_a a=$___________。

⑶对数恒等式

如果把 $a^b=N$ 中的 b 写成 $\log_a N$，则有 $a^{\log_a N}=$___________。

(4)对数底数的取值范围为_______________；真数的取值范围为_______________。

3．对数式与指数式的互化：

$$a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b$$

底数　指数　幂　　　　底数　真数　对数

如：$4^2=16\Leftrightarrow$ _________；$10^2=100\Leftrightarrow$ ________________。

$4^{\frac{1}{2}}=2\Leftrightarrow$ _____________；$10^{-2}=0.01\Leftrightarrow$ _________________。

【典例分析】

例 1．将下列指数式写成对数式：

(1) $5^4=625$　　(2) $2^{-6}=\dfrac{1}{64}$

(3) $3^a = 27$　　　　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^m = 5.73$

分析：根据对数的定义，我们只需要确定 $a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b$ 中的对应量，则问题得以解决。

解：(1) $\log_5 625 = 4$　　　　(2) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$

(3) $\log_3 27 = a$　　　　(4) $\log_{\frac{1}{3}} 5.73 = m$

例 2．将下列对数式写成指数式：

(1) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$　　　　(2) $\log_2 128 = 7$

分析：根据对数的定义，我们只需要确定 $a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b$ 中的对应量，则问题得以解决。

解：(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$　　　　(2) $2^7 = 128$

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．以下四式中正确的是(　)。

A．log22=4　　B．log21=1　　C．log216=4　　D．log2=$\frac{1}{2}$

2．下列各式值为 0 的是(　)。

A．1^0　　B．$\log_3 3$　　C．$(2-\sqrt{3})^0$　　D．$\log_2|-1|=\frac{1}{4}$

二、填空题

1．用对数形式表示下列各式中的 x

10^x=25：__________；　2^x＝12：__________；　$4^x=\frac{1}{6}$：__________；

2．求下列各式中的 x

(1) $\log_4 x = 0$，则 x=__________；　　(2) $\log_6 x = 1$，则 x=__________；

(3) $\log_3 x = 5$，则 x=__________；　　(4) $\log_2 x = -5$，则 x=__________；

三、解答题

求下列各式的值

(1) $2\log_2 8$=　　　　(2) $3\log_3 9$=

(3) $2^{\log_{\frac{1}{2}} 5}$ =　　　　(4) $\log_2 \frac{1}{8}$ =

能力提升

一、选择题

1．将等式 $3^2=9$ 写成对数式是（　　）。

A．$\log_9{}^3=2$　　B．$\log_2{}^9=3$　　C．$\log_9 2=3$　　D．$\log_3{}^9=2$

2．$\log_2\dfrac{1}{2}$ 的值等于（　　）。

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

3．$10^{\lg 3}$ 的值等于（　　）。

A．-3　　B．lg3　　C．3　　D．10

二、填空题

1．把下列对数式写成指数式：$\log_3{}^{81}=4$__________。

2．当底数为 ____________________时，$\dfrac{1}{27}$ 的对数是-3

3．求下列各式中 x 的值

(1) $\log_7(x^2-1)=0$ ，则 $x=$________；

(2) $\log_{\sqrt{3}}x=4$ ，则 $x=$ ______________；

(3) $\log_x{}^{27}=3$ ； 则 $x=$ _________________。

拓展训练

求下列各式中 x 的值：

(1) $x=\log_{27}\dfrac{1}{9}$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}x=-4$　　(3) $\log_x 8=-3$

4.3.2　常用对数与自然对数

【知识回顾】

1．我们通常将以 10 为底的对数叫做_________对数，为了简便，$\log_{10}N$ 简记作__________。

2．在科学技术中常常使用以无理数 e=2.71828…为底的对数，以 e 为底的对数叫_______对数，为了简便，对数 $\log_e N$ 简记作 _________。

【典例分析】

例 1 将下列对数式写成指数式：

(1) $\lg 0.01=-2$　　(2) $\ln 10=2.303$

分析：根据对数的定义，我们只需要确定 $a^b=N\Leftrightarrow\log_a N=b$ 中的对应量，则问题得以解决。

解：(1) $10^{-2}=0.01$　　(2) $e^{2.303}=10$

【能力检测】

基础闯关

一、填空题

1．$\lg1+\lg0.1+\lg0.01=$______________；

2．$2\log_5 10+\log_5 0.25=$______________；

3．$\lg10^{-5}=$______________；

4．$\lg0.01=$______________。

二、计算题

（1）$\lg1+\lg100+\lg0.1$　　　　（2）$10^{\lg3}+3\log_3 1$

能力提升

填空题

1．（1）$\lg10000=$____________　（2）$\lg0.01=$____________

（3）$2^{\log_2 4}=$______________　（4）$3^{\log_3 27}=$____________

2．求下列各式中和 X

（1）$\log_{\sqrt{3}} x=4$，则 $x=$____________；

（2）$\log_7(x^2-1)=0$，则 $x=$____________；

（3）$\log_x(2+\sqrt{3})=-1$，则 $x=$____________；

（4）$\log_{\frac{1}{3}} x=-2$，则 $x=$____________。

拓展训练

1．方程 $\lg x^2-\lg x=0$ 解集是______________。

2．如果 $f(10^x)=x$ 则 $f(3)=$__________。

3．计算：$\log_{25}625+e^{\ln2}+\lg\dfrac{1}{100}=$____________。

4.3.3　积、商、幂的对数

【知识回顾】

1．$\lg(MN)=$________________________________。

2．$\lg\dfrac{M}{N}=$________________________________。

3．$\lg M^n=$________________________________。

4．$\log_a b=$________________________________。

【典例分析】

例．用 $\lg x,\lg y,\lg z$ 表示下列各式

(1) $\lg\dfrac{xz}{y}$　　(2) $\lg\left(x^2yz\right)$

解：(1) $\lg\dfrac{xz}{y}=\lg(xz)-\lg y=\lg x+\lg z-\lg y$；(2) $\lg\left(x^2yz\right)=\lg x^2+\lg y+\lg z$

【能力检测】

基础闯关

1．用$\lg x,\lg y$表示$\lg\frac{x}{y}$是(　　　)。

A．$y-x$　　B．$\lg x+\lg y$　　C．$\lg x-\lg y$　　D．$\frac{\lg y}{\lg x}$

2．化简 $\lg 3^2$得(　　　)。

A．2lg6　　B．lg6　　C．$\dfrac{\lg 6}{2}$　　D．$\dfrac{\lg 3}{2}$

3．$\sqrt{(\lg 2)^2-\lg 4+1}$ 的值等于(　　　)。

A．1−lg2　　B．lg6　　C．1　　D．2

二、填空题

1．(1) lg2+lg5 =____________；　　(2) $9\log_3 5$ =______________。

2．已知 $\log_2 8=x$，$\log_2{}^{16}=y$，则 $x-y$________________________。

三、解答题

1．用：$\lg x,\lg y,\lg z$表示下列各式；

(1) $\lg\dfrac{x\sqrt{yz}}{y^2}$　　(2) $\lg\left(x^{\frac{2}{3}}y^{-2}z^{-5}\right)$

2．计算

(1) $\log_3{}^4+\log_3\dfrac{1}{4}$　　(2) 2lg2−(lg0.8+lg5)

能力提升

利用对数函数性质比较下列各题中两个值的大小

(1) $\log_2{}^5$ 与 $\log_2{}^6$；(2) $\log_{0.3}\dfrac{1}{4}$ 与 $\log_{0.3}\dfrac{1}{5}$　(3) $\log_{\frac{1}{3}}{}^{0.9}$ 与 $\log_{\frac{1}{3}}0.8$；(4) $\lg\pi$ 与 lg3.14

拓展训练

化简：$\sqrt{(\lg 2)^2-\lg 2+1}$

4.4　对数函数

4.4.1　对数函数及其图像与性质

【知识回顾】

1．对数函数的概念：一般地，形如____________的函数叫做对数函数，其中a为常数，($a>0$且$a\neq1$)，它的定义域为__________值域为：__________。

2．对数函数的图像：

(1) 图像恒在______轴(填“X轴或Y轴”) 的右边；

(2) 图像恒经过点 X 轴上一点，这点的坐标是________；

(3) 当a＞1 时，图像________(填“上升或下降”)；

当 0＜a ＜1 时，图像________填“上升或下降”)。

3．对数函数的性质：

(1) 函数的定义域是__________；值域为__________。

(2) 当x＝_____时，函数值$y=$ __________。

(3) 当a＞1 时，函数在(0，＋∞)内是______函数(填“增或减”)；

当 0＜a ＜1 时，函数在(0，＋∞)内是________函数(填“增或减”)。

【典例分析】

例 1．求下列函数的定义域：

(1) $y=\lg(x+1)$　　　　(2) $y=\dfrac{1}{\lg(x+1)}$

解：(1) 由$x+1>0$　得　$x>-1$，

所以函数$y=\lg(x+1)$ 的定义域为：

(－1，＋∞)

(2) 由$\begin{cases}\lg(x+1)\neq0\\x+1>0\end{cases}$得　$\begin{cases}x\neq0\\x>-1\end{cases}$

所以函数$y=\dfrac{1}{\lg(x+1)}$的定义域为：

(－1，0)∪　(0，＋∞)

例 2．比较下列各组数的大小：

(1) $\log_2\pi$与$\log_2 0.9$　　　　(2) $\lg\pi$ 与 $\lg3.14$

(3) $\log_{0.3}\dfrac{1}{4}$与$\log_{0.3}\dfrac{1}{5}$　　　　(4) $\log_2 0.3$与$\log_{0.2}0.3$

解：(1) 因为函数$y=\log_2 x$ 在(0，＋∞)是增函数，且$\pi>0.9$，所以$\log_2\pi>\log_2 0.9$

(2) 因为函数$y=\lg x$ 在(0，＋∞)是增函数，$\pi>3.14$，所以 $\lg\pi>\lg3.14$

(3) 因为函数$y=\log_{0.3}x$在(0，＋∞)是减函数，且$\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{5}$，所以$\log_{0.3}\dfrac{1}{4}<\log_{0.3}\dfrac{1}{5}$

(4) 因为$\log_2 0.3<\log_2 1=0$,而$\log_{0.2}0.3>\log_{0.2}1=0$，所以$\log_2 0.3<\log_{0.2}0.3$

点评：本题利用了对数函数的单调性或找中间变量(如 0)来比较两个数的大小。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．函数 $y=\log_5 x$ 恒经过下列哪个点(　　)？

A．【1，0)　　B．(1，0)　　C．(0，1)　　D．(0，1】

2．若函数 $y=\log_a x$ 经过点$(4,2)$，则 a 的值为(　　)。

A．2　　B．-2　　C．±2　　D．以上答案均错

3．下列函数在区间(0，$+\infty$)上是增函数的是(　　)。

A．$y=\log_{0.3} x$　　B．$y=\log_{0.5} x$　　C．$y=\log_{0.9} x$　　D．$y=\log_{1.2} x$

4．$y=\log_2(1-x^2)$ 定义域是（　　　）。

A．$(-1，1)$　　B．$(-1，1]$　　C．$[-1，1)$　　D．$[-1，1]$

5．下列式子中错误的是(　　　)。

A．$\lg 6<\lg 7$　　B．$\lg 5>0$　　C．$\log_{0.2} 2<\log_{0.2} 3$　　D．$\ln 3>\ln 2$

二、填空题

1．函数 $y=\lg(10-x)$ 的定义域为______________。

2．若 $\lg x=3$, 则 $x=$__________________。

3．用“＞”或“＜”填空：

(1) $\log_3 0.7$ _____ $\log_3 0.8$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}$ _____ $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{8}$

三、解答题

1．求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_6(2+x)$　　(2) $y=\sqrt{\log_6 x}$　　(3) $y=\dfrac{1}{\log_6 x}$

2．在同一坐标系内做出下列函数的图像：

(1) $y=\log_{0.3} x$　　(2) $y=\log_3 x$

能力提升

一、选择题

1．若 $\log_5 a<1$，则 a 的取值范围是(　　　　)。

A．$a>3$　　B．$a<3$　　C．$1<a<3$　　D．$0<a<5$

2．设 $a>1$，则函数 $y=a^{-x}$ 与函数 $y=\log_a x$ 在同一直角坐标系中的图像是(　　)。其图像如图 2-19 所示。

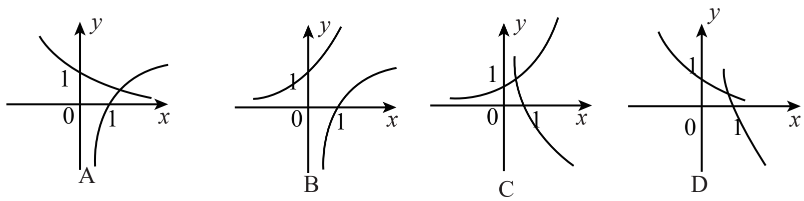


图 2-19

二、填空题

1．已知 $\log_3 x+\log_3(x+1)=\log_3 2$，　则 $x=$______；

2．已知 $4^x=8, \log_4 2=y$，则 $x+y=$______________。

三、解答题

1．设对数函数 $y=\log_a x$ 经过点 $(4,2)$，求 $f(8)$ 的值。

2．解不等式 $\lg(2x-5)>\lg(x-1)$。

拓展训练

比较下列两组数的大小：

(1) $2^{0.3}$，0.3^2，$\log_2 0.3$　　　(2) $\log_{0.5} 0.4$，$\lg 0.4$，$\log_2 0.4$

4.4.2　对数函数应用举例

【知识回顾】

对数函数的定义：____________，对数函数的定义域为__________，值域为___________。

【典例分析】

例 1．某工厂去年的产值为 5000 万元，从今年起的 6 年内计划平均每年比上一年提高 9%，问约经过多少年该工厂的年产值为 6800 万元？

解：设经过 x 年，由已知得 $5\ 000(1+9\%)^x=6\ 800$，则 $1.09^x=\dfrac{34}{25}$

所以 $x=\dfrac{\lg\frac{34}{25}}{\lg 1.09}\approx 4$(年)

例 2．学校实训用车，每年折旧率为 4%(即每年减少价值的 4%)，大约经过多少年它的价值为原来的一半。

解：设经过 x 年，由已知得 $(1-4\%)^x=\dfrac{1}{2}$，则 $0.96^x=\dfrac{1}{2}$

所以 $x=\dfrac{\lg\frac{1}{2}}{\lg 0.96}\approx 16$(年)。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题（共 40 分）

1．已知 $2^x=8$，则 $x=$(　　)。

A．5　　B．2　　C．3　　D．8

2．已知 $\log_2 3=a$，则 $\log_2 9$ 的值为(　　)。

A．$4a$　　B．$2a$　　C．$2\sqrt{2}a$　　D．a

二、填空题

3．利用计算器求对数(精确到 0.0001)：

(1) $\lg1.09\approx$__________；(2) $\lg0.5\approx$__________；(3) $\lg0.96\approx$__________。

能力提升

某幼儿园的学生数每年平均增长 20%，大约经过多少年该幼儿园的学生人数将翻一番(即是原来的 2 倍)?

拓展训练

一个班级里有 83 个学生，一天两个学生开始唱歌，之后每过 3 分钟就会有三个学生开始跟着唱，问要过多久后所有的学生会跟着唱？

测试题

一、选择题（共40分）

1．16 的平方根是（　　　）。

A．-4　　B．4　　C．±4　　D．±81

2．$(5\ \frac{1}{3})\frac{1}{2}+\lg\ \frac{1}{6}+\lg^{6}$ 的值等于(　　　)。

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．2　　D．$\frac{4}{3}$

3．下列函数中属于指数函是(　　　)。

A．$y=2^{x}$　　B．$y=2^{x}$　　C ．$y=2^{x+y}$　　D．$y=\log_{2}{}^{x}$

4．给出下列几组等式：

(1) $\sqrt[3]{(-5)^{3}}=-5$；　(2) $\lg m+\lg n=\lg(mn)$　(3) $3^{x+y}=3^{x}+3^{y}$

(4) $\lg\frac{a}{b}=\ \frac{\lg b}{\lg a}$

其中成立的等式有(　　　)。

A．0个　　B．1个　　C．2 个　　D．3个

5．下列式子中错误的是(　　　)。

A．$3^{0.2}>3^{-2}$　　B．$3^{-0.2}<1$

C．$3.22_{\frac{1}{2}}>3.23^{\frac{1}{2}}$　　D．$0.32^{-1}>0.33^{-1}$

6．下列式子中正确的是(　　　)。

A．$\lg8<0$　　B．$\lg6>\lg3$

C．$\log_{\frac{4}{3}}0.3>\log_{\frac{4}{3}}0.2$　　D．$\log_{0\cdot1}5>\log_{0\cdot1}3$

7．$\sqrt[3]{1-\lg 5)^{2}}$ 的值等于(　　　)。

A．0　　B．$1-\lg5$　　C．$\lg6-1$　　D．2

8．既不是奇函数也不是偶函数是(　　　)。

A．-16　　B．$y=3x$　　C．$y=\dfrac{3}{x}$　　D．$y=x^2$

9．已知$f(x)=x^n$，且它的图像过点(2．16),则 $f(-2)$的值等于(　　)

A．-16　　B．-2　　C．2　　D．16

10．若$\log_4(2x-3)>0$，则x的取值范围是(　　)

A．$x<2$　　B．$x>2$　　C．$x\leqslant 2$　　D．$x\geqslant 2$

二、填空题(共18分)

1．求值$\lg^4+\lg 25=$________。

2．化简$\sqrt{(\lg^2)^2-2\lg 2+1}=$________。

3．$y=3^x$ 与$y=3^{-x}$图像关于________轴对称。

4．比较大小：

(1) $(\dfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ ________ $(\dfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$　　(2) $\log_6 3$________$\log_6 2$

5．若 $8^x=2$，$8^y=4$，则8^{x+y}________。

6．函数$y=x^{-\frac{1}{2}}$的定义域是________。

三、解答题(共42分)

1．计算

(1) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^0+(\dfrac{1}{2})^{-2}+(125)^{\frac{2}{3}}$

(2) $\log_6^7\cdot\log_7^6$

2．求下列函数定义域

(1) $y=2\sqrt{3x}$　　(2) $y=\log(x^2+x-2)$

3．已知$(x-2)^2+|x-4y|=0$，求$\log_x{}^y$的值(8 分)

4．某集团公司去年的年利润为m万元，若从今年开始平均利润增加20%，设x年后该公司的年利润为y万元，请写出年利润随着年数变化的函数关系式。(8)

第 5 章　三角函数

5.1　角的概念推广

【知识回顾】

1．角的概念：一个射线绕着它的端点旋转，按__________旋转所成的角叫做正角；按__________旋转所成的角叫做负角；当射线没有做任何旋转时，也认为形成了一个角，这个角叫__________。

2．象限角和界限角：将角的顶点与坐标原点重合，始边与x轴的正半轴重合，角的，就把这个角叫做第几象限的角；终边在___________的角叫做界限角。

3．终边相同角：与角α终边相同的角(包括角α在内)都可以写成_________________，它们组成集合_____________________，终边在x轴上的角的集合是__________________，终边在y轴上的角的集合是_________________。

【典例分析】

例 1．写出与下列各角终边相同的角的集合，并判断它们各是哪个象限的角：

(1) $-120°$；　　　(2) $640°$

分析　与角α终边相同的角的一般形式是$\beta=\alpha+k.360°(k\in Z)$，$\alpha$是任意角包括正角、负角和零角；$k$是任意整数，即任意正整数、负整数或 0。

把β写成$\beta=\alpha+k.360°(k\in Z)$，$0°\leqslant\alpha<360°$是确保$\beta$是哪个象限的角的基础；

解：(1)与$-120°$终边相同的角的集合是$\{\beta|\beta=-120°+k.360°,k\in z\}$

当$k=-1$时，$-120°=240°-360°$ 因为$240°$是第三象限的角，所以$-120°$是第三象限的角。

(2) 与$640°$终边相同的角的集合是$\{\beta|\beta=640°+k.360°,k\in z\}$

当$k=1$时，$640°=280°+360°$

因为$280°$是第四象限的角，所以$640°$是第四象限的角。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．$300°$角的终边在(　　)。

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．与$45°$角终边相同的角为(　　)。

B．$-45°$　　B．$315°$　　C．$-315°$　　D．$90°$

二、填空题

1．$\{\beta|\beta=75°-k.360°\}(k\in z)$所表示的角是第________象限的角。

2．在$0°\sim360°$之间，与$480°$终边相同的角是________。

三、解答题

在 0°～360°之间，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们各是哪个象限的角？

(1) −45°；　　(2) 780°；　　(3) −480°。

能力提升

一、选择题

1．1100°角的终边在(　　)。

C．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．与−75°角终边相同的角为(　　)。

D．75°　　B．285°　　C．−285°　　D．150°

3．下列命题中正确的是(　　)。

A．第一象限的角是锐角　　B．第二象限的角比第一象限的角大

C．锐角是第一象限角　　D．三角形内角是第一象限角或第二象限角

二、填空题

1．$\{\beta | \beta = -45^\circ + k.360^\circ\}(k \in z)$ 所表示的角是第________象限的角。

2．在 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 之间，与 560°终边相同的角有______________。

三、解答题

写出与下列各角终边相同的角的集合，并把其中在 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 范围内的角写出来。

(1) 600°　　(2) −150°

拓展训练

一、填空题

(1) 设 0°＜α＜45°，则 2α 是第___________象限的角。

(2) 设 90°＜α＜135°，则 2α 是第___________象限的角。

二、解答题

分别写出终边在 y 轴的正半轴、y 轴的负半轴和 y 轴上的角的集合。

5.2　弧度制

【知识回顾】

1．弧度制：把等于________________________叫做 1 弧度的角；以_________为单位来度量角的单位制叫弧度制。进而，当角 α 用弧度表示时，其绝对值等于_______与________的比。即 $|\alpha|$ =_________。特别的，1° =__________弧度，1(rad) ≈ ____________度。

2．正角的弧度数为______实数，负数的弧度数为______实数，零角的弧度数为______。

【典例分析】

例 1．把下列各角由角度转换为弧度。(写为 π 的倍数)。

(1) 75°　　(2) −135°

解：(1) 因为 $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$，所以　$75^\circ = 75 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{5\pi}{12}$

(2) $-135° = -135\times\frac{\pi}{180} = -\frac{3\pi}{4}$。

例 2．将下列各弧度化为度：

(1) $\frac{5\pi}{6}$　　　　(2) $-\frac{7\pi}{3}$

解：(1) 因为 $\pi = 180°$，所以 $\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{6}\times 180° = 150°$

(2) $-\frac{7\pi}{3} = -\frac{7}{3}\times 180° = -420°$

分析　$360° = 2\pi$，$\pi = 180°$，$1° = \frac{\pi}{180}$ 记住了这个关系，角的弧度数与角度数的互化就不困难了。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．用弧度表示角 135° 的是(　　)。

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．$\frac{4\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$-\frac{3\pi}{4}$

2．用角度表示 $\frac{7\pi}{4}$ 的是（　）。

A．300°　　B．315°　　C．225°　　D．210°

二、填空题

1．用弧度制表示角 245° =__________弧度。

2．用角度制表示 $\frac{11\pi}{6}$ =__________度。

三、解答题

1．把下列各角由角度转换为弧度：

(1) −150°　　(2) 105°　　(3) 245°

2．把下列各角由弧度转换为角度：

(1) $\frac{3\pi}{4}$；　　(2) $\frac{5\pi}{3}$；　　(3) $\frac{5\pi}{4}$

能力提升

一、选择题

1．用弧度表示角−270° 的是(　　)。

A．$-\frac{3\pi}{2}$　　B．$\frac{3\pi}{2}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$-\frac{2\pi}{3}$

2．用角度表示 $-\frac{11\pi}{6}$ 的是（　　）。

A．300° B．−300° C．330° D．−330°

二、填空题

1．用弧度制表示角 585° =________弧度。

2．用角度制表示：$-\dfrac{5\pi}{4}$=________度。

三、解答题

1．把下列各角由角度转换为弧度：

⑴ 165° ⑵ 255° ⑶ −150°

2．把下列各角由弧度转换为角度：

(1) $\dfrac{9\pi}{4}$ (2) $\dfrac{7\pi}{3}$ (3) $\dfrac{23\pi}{4}$

拓展训练

一条弧长等于半径的 2 倍，这条弧所对的圆心角是多少度？

5.3　任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数

【知识回顾】

1．任意角的三角函数定义：一般地，设角 α 是平面直角坐标系中的一个任意角，点 $p(x,y)$ 为角 α 终边上的一个任意一点，点 p 到原点的距离为 $r=$________且 r ________0，那么角 α 的正弦、余弦和正切分别定义为。

$\sin\alpha=$________、$\cos\alpha=$________、$\tan\alpha=$________。

2．正弦函数、余弦函数和正切函数都是____________函数。

3．将表 2-6 所列填写完整：

表 2-6

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	
$\cos\alpha$	
$\tan\alpha$	

4．各象限的角的三角函数正负号：正弦函数________象限为正；余弦函数________象限为正；正切函数________象限为正。

5．填表，如表 2-7 所列。

表 2-7

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度								
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\tan\alpha$					不存在		不存在	

【典例分析】

例．求角 390° 和$-\frac{4\pi}{3}$的正弦、余弦、及正切函数值。

解：$\sin 390^\circ=\sin(30^\circ+360^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$；

$\cos 390^\circ=\cos(30^\circ+360^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

$\tan 390^\circ=\tan(30^\circ+360^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

$\sin(-\frac{4\pi}{3})=\sin(\frac{2\pi}{3}-2\pi)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

$\cos(-\frac{4\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3}-2\pi)=\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}$；

$\tan(-\frac{4\pi}{3})=\tan(\frac{2\pi}{3}-2\pi)=\tan\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$。

牢记特殊角的三角函数值，是能准确、迅速地完成本章习题的基础。

三角函数在各象限的符号记忆口诀：Ⅰ全正，Ⅱ正弦，Ⅲ正切，Ⅳ余弦。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列各式判断正确的是(　　)。

A．$\sin\frac{7\pi}{4}>0$　　B．$\cos\frac{7\pi}{4}>0$　　C．$\tan\frac{7\pi}{4}>0$

2．下列各式判断正确的是(　　)

A．$\sin(-\frac{\pi}{3})>0$　　B．$\cos(-\frac{\pi}{3})>0$　　C．$\tan(-\frac{\pi}{3})>0$

3．$\tan\frac{5\pi}{6}$的值是(　　)。

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

二、填空题（用“>、< 或 =”填空）

$\sin\frac{\pi}{3}$ ________0，　　$\cos\frac{\pi}{3}$ ________0；　　$\tan\frac{\pi}{3}$ ________0。

$\sin\frac{2\pi}{3}$ ________0，　　$\cos\frac{2\pi}{3}$ ________0；　　$\tan\frac{2\pi}{3}$ ________0。

$\sin\frac{7\pi}{6}$ ________0，　　$\cos\frac{7\pi}{6}$ ________0；　　$\tan\frac{7\pi}{6}$ ________0。

三、解答题

1．求角 420° 和$-\frac{11}{6}\pi$的三角函数值。

2．已知角α的终边上一点$P(2,1)$，分别求$\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$的值。

能力提升

1．已知点$p\left(2,2\sqrt{3}\right)$在角$\alpha$的终边上，求$\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$的值。

2．计算：$\sin 60^\circ-\cos^2 45^\circ+\dfrac{3}{4}\tan^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ-\sin 30^\circ$。

拓展训练

1．已知角α是第一象限的角，并且终边在直线$y=x$，求角α的正弦函数和余弦函数值。

2．计算：$2\tan 0^\circ+\cos 90^\circ-12\sin 180^\circ$

5.4　同角三角函数的基本关系

【知识回顾】

1．以原点为圆心，________________为半径的圆叫做单位圆。角的终边与单位圆的交点坐标为___________。

2．同角三角函数的基本关系式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=$__________，$\tan\alpha=$____________。

【典例分析】

例 1．已知$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且$\alpha$是第一象限的角，求$\sin\alpha$和$\tan\alpha$的值。

解：方法一，由已知条件$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且$\alpha$是第一象限的角可知$\alpha=45^\circ$，

$\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　　$\tan 45^\circ=1$

方法二，由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可得$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$；

又因为α是第一象限的角，故$\sin\alpha>0$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\ ==\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{con\alpha}\ =1。$$

例 2．化简三角函数式：$\dfrac{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha}(270^\circ>\alpha>360^\circ)$

解：因为$270^\circ<\alpha<360^\circ$，所以$\cos\alpha>0$。

$$\frac{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$$

根据$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$和$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$来解，角所在的象限不同，所求的解可以有一组、两组解或更复杂一些的情况。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．已知$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，且α是第一象限的角，$\cos\alpha$和$\tan\alpha$的值分别是(　　)。

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．已知$\sin\alpha=1$，且α在0°~360°之间，α的值是(　　)。

A．0°　　B．90°　　C．180°　　D．270°

3．若$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，则$\sin\alpha.\cos\alpha$的值为(　　)。

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、填空题

1．已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$\alpha$是第一象限的角，$\cos\alpha=$________，$\tan\alpha=$__________。

2．已知$\tan\alpha=\frac{5}{12}$，且α是第三象限的角，$\sin\alpha=$________，$\cos\alpha=$___________。

3．已知$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，且α是第四象限的角，$\sin\alpha=$________，$\tan\alpha=$__________。

三、化简三角函数式

(1) $\cos\alpha\tan\alpha$　　　　(2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}$

能力提升

一、选择题

1．已知$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，且$\alpha$在0°~360°之间，$\cos\alpha$的值是(　　)。

A．180°　　B．200°　　C．315°　　D．350°

2．已知$\cos^2\alpha=\frac{24}{25}$，且$\alpha$是第四象限的角，$\sin\alpha$的值是(　　)。

A．$\frac{1}{5}$　　B．$-\frac{1}{5}$　　C．5　　D．-5

3．已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，$\cos\alpha$的值是(　　)。

A．$\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\frac{5}{4}$　　D．$-\frac{5}{4}$

二、填空题

1．已知$\tan\alpha=\sqrt{3}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$则$\sin\alpha=$_________。

2．已知$\sin^2\beta=\dfrac{9}{25}$，则$\cos\beta=$__________或__________。

3．已知$\cos^2\alpha=\dfrac{25}{169}$，则$\sin\alpha=$__________或__________。

三、解答题

已知$\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，且$\alpha$是第三象限的角，求$\sin\alpha$和$\tan\alpha$的值。

拓展训练

已知$\tan\alpha=3$，求角α的正弦和余弦值。

5.5　诱导公式

【知识回顾】

1．诱导公式：

（1）$\alpha+k\cdot 360^\circ\ (k\in Z)$的诱导公式；　　（2）$-\alpha$的诱导公式；

（3）$180^\circ+\alpha$的诱导公式；　　（4）$180^\circ-\alpha$的诱导公式。

【典例分析】

例．求下列各角的正弦、余弦、正切值：

（1）$\sin\left(-\dfrac{55\pi}{6}\right)$　　(2) $\cos\dfrac{23\pi}{4}$　　(3) $\tan 675^\circ$

解：(1) $\sin\left(-\dfrac{55\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{55\pi}{6}=-\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}+8\pi\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi\right)=-\left(-\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

(2) $\cos\dfrac{23\pi}{4}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}+6\pi\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan 675^\circ=\tan\left(-45^\circ+720^\circ\right)=\tan\left(-45^\circ\right)=-\tan 45^\circ=-1$

诱导公式中的α是任意角(任意正、负及零角)。

把任意角β，写成$\beta=\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha\prec 2\pi,k\in z)$的形式，是解题的关键。

诱导公式(或简化公式)的正负号可以用口诀：“$2k\pi$加全为正，负角余弦正，π减正弦正，π加正切正”来记忆。利用它们可以把任意角的三角函数转化为锐角的三角函数。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．$\sin\dfrac{7\pi}{3}$的值是(　　)。

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2．$\cos\frac{9\pi}{4}$的值是(　　)。

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

(1) $\tan(-\frac{\pi}{3})=$__________　　(2) $\cos\frac{2\pi}{3}=$__________。

三、解答题

(1) 求$\cos\frac{23\pi}{4}$的值；　　(2) 求$\tan 210^\circ$的值。

能力提升

一、选择题

(1) $\cos\frac{13\pi}{3}$的值是(　　)。

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\tan\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$的值是(　　)。

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

(1) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=$__________；　　(2) $\cos 135^\circ=$__________。

三、解答题

(1) 求$\cos\frac{25\pi}{6}$的值；　　(2) 求$\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$的值。

拓展训练

求$\frac{41\pi}{6}$的正弦、余弦、正切函数值。

5.6　三角函数的图像和性质

【知识回顾】

1．正弦函数的图像和性质：正弦函数$y=\sin x$的定义域是____________。主要性质有：

(1) 有界性，正弦函数是有界函数，其值域是____________。当$x=$____________时，y取得最大值____________；当$x=$____________时，y取得最小值____________。

(2) 周期性，正弦函数是周期为____________的周期函数。

(3) 奇偶性，正弦函数是__________函数，它的图像关于__________对称。

(4) 单调性，正弦函数在每一个区间________________上都是增函数，其函数值从最小值-1________________到最大值 1；而在每一个区间___________________上都是减函数，其函数值从最大值 1_________________到最小值-1。

观察发现，正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[0,2\pi\right]$上的图像中有五个关键点，它们的坐标分别是________________。

2．余弦函数的图像和性质：余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域是____________。主要性质有：

(1)有界性：余弦函数是有界函数，其值域是____________。当 $x=$_____________时，y 取得最大值是___________；当 $x=$_____________时，y 取得最小值是_____________。

(2)周期性：余弦函数的周期为________________的周期函数。

(3)奇偶性：余弦函数是_______________函数，它的图像关于_______________对称。

(4)单调性：余弦函数在每一个区间________________上都是增函数，其函数值从最小值-1________________到最大值 1；而在每一个区间________________上都是减函数，其函数值从最大值 1_________________到最小值-1。

观察发现，余弦函数 $y=\cos x$ 在$\left[0,2\pi\right]$上的图像中有五个关键点，它们的坐标分别是__________。

【典例分析】

例 1．不求值，比较$\cos\dfrac{\pi}{5}$和$\cos\dfrac{\pi}{6}$的大小。

解：因为$0<\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{5}<\pi$

而 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上是减函数，所以

$\cos\dfrac{\pi}{5}<\cos\dfrac{\pi}{6}$。

例 2．不求值，比较$\sin\dfrac{2\pi}{3}$和$\sin\dfrac{3\pi}{4}$的大小

解：因为$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{2}$，且正弦函数在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$上是减函数，所以

$\sin\dfrac{2\pi}{3}>\sin\dfrac{3\pi}{4}$

不求值，比较两个三角函数值大小的方法：①根据图像；②根据性质。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．正弦函数 $y=\sin 2x$，y 取最大值是(　　)。

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

2．余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\left[0,\pi\right]$，下列说法错误的是(　　)。

A．$\cos\frac{\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{9}$　B．$\cos\frac{\pi}{7}>\cos\frac{\pi}{5}$　C．$\cos\frac{3\pi}{4}<\cos\frac{2\pi}{3}$　D．$\cos\frac{3\pi}{4}>\cos\frac{2\pi}{3}$

二、填空题

1．不求值，比较下列各组正弦值的大小。

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$________$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$　(2) $\sin\frac{5\pi}{8}$________$\sin\frac{6\pi}{8}$

2．不求值，比较下列各组余弦值的大小。

(1) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$________$\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$　(2) $\cos\frac{5\pi}{8}$________$\cos\frac{6\pi}{8}$

能力提升

一、选择题

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，下列说法错误的是(　　　)。

A．$\sin(-\frac{\pi}{4})<\sin(-\frac{\pi}{5})$　B．$\sin(-\frac{\pi}{4})>\sin(-\frac{\pi}{7})$　C．$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)<\sin\frac{\pi}{6}$　D．$\sin\frac{2\pi}{5}>\sin\frac{2\pi}{7}$

二、填空题

1．$y=2\sin x$ 的最小正周期是________。

2．$y=1+\sin x$ 的最小正周期是________。

拓展训练

解答题

在区间 $[-\pi,\pi]$ 里，求使下列各式分别成立的 x 的值：

(1) $\frac{1}{2}-\sin x=0$；　(2) $\frac{1}{2}+\sin x=0$。

测试题

一、选择题（共40分）

1．115° 所在的象限是(　　)。

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

2．与 405° 角终边相同的角为(　　　)。

A．-45°　B．315°　C．-315°　D．45°

3．$\cos150^\circ$ 的值是(　　)。

A．$\frac{1}{2}$　B．$-\frac{1}{2}$　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　D．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4．用弧度表示角 75° 的是(　　　)。

A．$\frac{5\pi}{12}$　B．$\frac{12\pi}{5}$　C．$\frac{2\pi}{3}$　D．$\frac{3\pi}{4}$

5．用角度表示$\dfrac{5\pi}{3}$的是（　　）。

A．300°　　B．315°　　C．225°　　D．210°

6．下列各式判断正确的是(　　)。

A．$\sin(-50^\circ)>0$　　B．$\cos(-50^\circ)>0$　　C．$\tan(-50^\circ)>0$

7．$\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$的值是(　　)。

A．1　　B．−1　　C．0　　D．不存在

8．已知$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且$\alpha\in(90^\circ$~$360^\circ)$，$\cos\alpha$的值是(　　)。

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9．已知$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，且α是第4象限的角，$\tan\alpha$的值是(　　)。

A．$-\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$-\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{3}{5}$

10．已知$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha$的值是(　　)。

A．45°　　B．135°　　C．225°　　D．300°

二、填空题（共15分）

1．用“<、>或=”填空：

$\sin 50^\circ$________0，　　$\cos 50^\circ$________0；　　$\tan 50^\circ$________0。

$\sin\dfrac{2\pi}{3}$________0，　　$\cos\dfrac{2\pi}{3}$________0；　　$\tan\dfrac{2\pi}{3}$________0。

$\sin(-\dfrac{\pi}{4})$________0，　　$\cos(-\dfrac{\pi}{4})$________0；　　$\tan(-\dfrac{\pi}{4})$________0。

2．写出下列各角的三角函数值：

$\sin180^\circ=$____________，$\cos180^\circ=$____________，$\tan180^\circ=$____________。

$\sin\dfrac{3\pi}{2}=$____________，$\cos\dfrac{3\pi}{2}=$____________，$\tan2\pi=$____________。

三、解答题（共45分）

1．已知$\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$，$\alpha$在第三象限，求$\sin\alpha$和$\tan\alpha$的值。

2．已知角α的终边经过点$p(-4a,3a)$ $(a<0)$，求α的三角函数值。

3．利用单调性比较下列各组函数值的大小：

(1) $\sin\dfrac{3\pi}{4}$与$\sin\dfrac{3\pi}{7}$　　(2) $\cos\dfrac{7\pi}{15}$与$\cos\dfrac{5\pi}{8}$

第 6 章　数列

6.1　数列的定义及通项公式

6.1.1　数列的定义

【知识回顾】

1．数列的定义:按照_________排列的一列数称为数列，数列中的每个数都叫做这个数列的______。项数有限的数列叫做_______数列，项数无限的数列叫做_______数列。

2．数列的表示方法:数列的一般形式可以写成 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，简记为_______，其中 a_1 称为数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项(或称为首项)， a_2 称为第 2 项，…， a_n 称为第 n 项。

【典例分析】

例．已知下列数列：

(1) 2，4，6，8，10；

(2) 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，…，$\frac{1}{2n1}$，…；

(3) 0，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，…；

(4) 9，9，9，9，9，9。

其中，有穷数列是________，无穷数列是________ (将合理的序号填在横线上)。

解：(1) 是有穷数列；

(2) 是无穷数列；

(3) 是无穷数列；

(4) 是常数列，也是有穷数列。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．关于以下 4 个数列：

(1) −1，1，−1，1，…；　　(2) 1，3，5，7，…；

(3) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，…；　　(4) −27，9，−3，1。

正确的叙述是(　　)。

A．(1)(2)是无穷数列，(3)(4)是有穷数列

B．(2)(3)是无穷数列，(1)(4)是有穷数列

C．(1)(2)(3)是无穷数列，(4)是有穷数列

D．(2)是无穷数列，(1)(3)(4)是有穷数列

2．已知数列$\{a_n\}$的前 4 项为 2，4，6，8，则 a_6 为(　　)。

A．10　　B．12　　C．14　　D．16

3．数列 1，4，9，16，x，36 中，x 的值为(　　)。

A．18　　B．20　　C．25　　D．30

二、填空题

1．将正整数的前 5 个数排列如下：

① 1，2，3，4，5；② 5，4，3，2，1；③ 2，1，5，3，4；④ 4，1，5，3，2。

那么可以称为数列的有________。

2．(1) 1，3，5，7，____，11，_____，⋯　(2) -5，5，-5，5，____，5，⋯

三、解答题

1．举出两个数列的例子

2．设数列$\{a_n\}$为“1，3，9，27，81，⋯”，指出其中a_2和a_5各是什么数？27 是数列的第几项？

能力提升

一、选择题

1．下列有关数列的说法正确的是(　　)。

① 同一数列的任意两项均不可能相同；

② 数列$-1,0,1$ 与数列 $1,0,-1$ 是同一个数列；

③ 数列中的每一项都与它的序号有关。

A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．③

2．已知数列$\{a_n\}$的前 4 项为 1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，则a_8为(　　)。

A．3　　B．$\sqrt{11}$　　C．$\sqrt{13}$　　D．$\sqrt{15}$

二、填空题

1．按项数分类数列 1，2，3，⋯，100 是____数列，数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，⋯是____数列。

2．数列 1，3，6，10，x，21，28，⋯中 x 的值是________。

拓展训练

已知数列$\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{3\times4}$，⋯，$\frac{1}{n\times(n+1)}$，⋯，求这个数列的第6项，第15项。

6.1.2　数列的通项公式

【知识回顾】

1．数列的通项公式。

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式。

【典例分析】

例 1　写出下列数列的一个通项公式。

(1) -1，1，-1，1，⋯

(2) $\frac{1}{2}$，2，$\frac{9}{2}$，8，$\frac{25}{2}$，…

(3) $\frac{1}{12}$，$\frac{1}{23}$，$\frac{1}{34}$，$\frac{1}{45}$，…

解：(1)观察发现，各项的绝对值都是 1，符号为负、正相间，各项恰好为底为-1 指数为其项数的幂，故数列的一个通项公式为 $a_n=(-1)^n$ 。

(2) 观察发现，数列的项，有的是分数，有的是整数，可将各项都统一成分数再观察：$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{2}$，$\frac{9}{2}$，$\frac{16}{2}$，$\frac{25}{2}$，…，所以它的一个通项公式为 $a_n=\frac{n^2}{2}(n\in N^*)$。

(3) 观察发现， 这个数列的前 4 项都等于项数与项数加 1 的积的倒数，所以它的一个通项公式是 $a_n=\frac{1}{n(\mathrm{n}+1)}(n\in N^*)$。

例 2．设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2^n}$，写出数列的前 5 项。

分析：知道数列的通项公式，求数列的某一项时，只需要将通项公式中的换成该项 n 的项数，并计算结果。

解：$a_1=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2};a_2=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4};a_3=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8};a_4=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16};a_5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$。

例 3．判断 15 和 20 是否为数列 $\{2n-5\}$ 的项，如果是，是第几项？

解：数列的通项公式为 $a_n=2n-5$，将 15 代入公式中：则有

$15\ =\ 2n-5$

$n=10\in N^*$

将 20 代入公式中，则有

$20\ =\ 2n-5$

$n=\frac{25}{2}\notin N^*$

所以，15 是数列 $\{2n-5\}$ 的项，20 不是数列 $\{2n-5\}$ 的项。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．已知数列 $a_n=-2n+3$，则 $a_5=($　　$)$。

A．13　　B．-7　　C．8　　D．12

2．已知数列 1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{15}$，…，$\sqrt{2n1}$，…，那么 $\sqrt{63}$ 是该数列的第几项(　　)。

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

3．数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项分别为 4，8，16，32，则该数列的通项公式是(　　)。

A．$a_n=2^{n+1}$　　B．$a_n=2^n$　　C．$a_n=2n+2$　　D．$a_n=4n$

二、填空题

1．已知数列的通项公式为 $a_n=\frac{1}{3n-2}$，则 $a_8=$__________。

2．数列 $a_n=(n+2)^2$ 的第 ________项是 81 。

3．数列 2，4，8，16，32，…的一个通项公式是 ______________ 。

三、解答题

1．根据下列数列的前 5 项，写出数列的通项公式：

(1) 2，2，2，2，2，…

(2) 1，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{7}$，$\dfrac{5}{9}$，…

2．已知数列通项公式 $a_n=2n-3$，试判断 47 是不是该数列的一项，若是，求是第几项？

能力提升

一、选择题

1．已知数列 $\{n^2+n\}$，那么(　　)。

A．0 是数列中的一项　　B．21 是数列中的一项

C．42 是数列中的一项　　D．以上答案都不对

2．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为 1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可能为(　　)。

A．$a_n=\sqrt{2n1}$　　B．$a_n=2n-1$　　C．$a_n=\sqrt{2n1}$　　D．$a_n=2n+1$

二、填空题

1．已知数列前 4 项为 9，99，999，9 999，…，则此数列的通项公式为______。

2．已知数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{11}$，…，则 $2\sqrt{5}$ 是这个数列的第______项。

三、解答题

1．判断 6 是不是数列 $\{n^2+n\}$ 中的项，如果是，是第几项？

2．已知数列的通项公式为 $a_n=(-1)^n.\dfrac{1}{2n+1}$，求 a_1 和 a_6。

拓展训练

1．数列的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3n+1, & n\text{为奇数},\\ 2n-1, & n\text{为偶数},\end{cases}$ 则 $a_2\cdot a_3$ 等于_______。

2．已知数列的通项公式为 $a_n=\dfrac{4}{n^2+3n}$，试问：$\dfrac{1}{10}$ 和 $\dfrac{16}{27}$ 是不是它的项？如果是，是第几项？

6.2　等差数列

6.2.1　等差数列的定义

【知识回顾】

1．如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项所得的差都等于____________，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的______，公差通常用_____表示。

2．若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，d 为公差，则 $a_{n+1}-a_n=d$，即 $a_{n+1}=a_n+d$

【典例分析】

例 1．已知等差数列的首项为 5，公差为 -3，试写出这个数列的第 2 到第 5 项。

解：根据题意可知 $a_1=5,d=-3$，因此

$a_2=a_1+d=12+(-5)=7$

$a_3=a_2+d=7+(-5)=2$

$a_4=a_3+d=2+(-5)=-3$

$a_5=a_4+d=(-3)+(-5)=-8$。

例 2．判断下列数列是否为等差数列。

(1) 在数列$\{a_n\}$中，$a_n=3n+2$；

(2) 在数列$\{a_n\}$中，$a_n=n^2+n$。

解：(1) $a_{n+1}-a_n=3(n+1)+2-(3n+2)=3(n\in N^*)$，由 n 的任意性知，这个数列为等差数列。

(2) $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2+(n+1)-(n^2+n)=2n+2$，不是常数，所以这个数列不是等差数列。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列各数列中，成等差数列的是(　　　　)。

A．0，1，3，5　　B．3，5，8，10　　C．$-8,-8,-8,-8,\cdots$　　D．$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$

2．已知等差数列 $-3,-6,-9,-12$，…，则 $a_8=$(　　　　)。

A．-24　　B．-21　　C．-18　　D．-15

二、填空题

1．等差数列 3，7，11，…的第 4 项是________。

2．下列数列中是等差数列的为________(填序号)；

① 6，6，6，6，6；　　② -2，-1，0，1，2；

③ 5，8，11，14；　　④ 0，1，3，6，10。

三、解答题

1．写出等差数列 2，5，8，…的第 4 项至第 8 项；

2．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,d=-2$，写出这个数列第 2 项至第 6 项。

能力提升

在数列$\{a_n\}$中，$a_n=2n-5$，试判断这个数列是否为等差数列。

6.2.2　等差数列的通项公式

【知识回顾】

等差数列的通项公式：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则通项公式为 $a_n=$ __________，即只要已知等差数列{ a_n }的 ________ 和 __________ ，就可以直接计算出数列中的任何一项，而且通项公式只能有四个量 a_1,a_n,d,n ，只要知道了其中的_______个量，就可以通过解方程求出另外一个量。

【典例分析】

例 1．已知等差数列$\{a_n\}$首项$a_1=2$，$a_3=12$，求公差d。

解：由数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)\ d$得

$12=a_1+2d$

解得　$d=5$

例 2．已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_5=10$，$a_{12}=31$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若$a_n=13$，求n的值.

解：(1) 设$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，则由题意

可知$\begin{cases}a_1+4d=10\\a_1+11d=31\end{cases}$　解得$\begin{cases}a_1=-2\\d=3\end{cases}$，$\therefore a_n=-2+(\mathrm{n}-1)\times3=3\mathrm{n}-5$。

(2) 由$a_n=13$，得$3n-5=13$，解得$n=6$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=20$，$a_7=17$，则公差d=(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{3}$

2．在等差数列 1，4，7，10，…中，则a_n是(　　)

A．$2n-1$　　B．$3n-1$　　C．$3n-2$　　D．$3n+2$

3．在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=2,a_5=11$，则$a_8=$（　　）。

A．17　　B．18　　C．19　　D．20

二、填空题

1．已知等差数列$\{a_n\}$，$a_n=4n-3$，则首项a_1为________，公差d为_______；

2．已知等差数列$\{a_n\}$，$a_1=5,a_6=-5$，则$a_{10}=$___________；

3．若数列 1，a，9 是等差数列，则a的值为________；

三、解答题

1．在等差数列$\{a_n\}$中，（1）已知$d=-2$，$a_5=-5$，求a_1。(2) 已知$a_1=5$，$a_3=8$，求a_7；(3)已知$a_1=2$，$d=3$，$a_n=23$，求n。

2．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=8,a_7=20$，求a_{12}。

能力提升

一、选择题

1．已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=3-2n$，则它的公差d为(　　)。

A．2　　B．3　　C．-2　　D．-3

2．$\triangle ABC$中，三内角$A.B．C$成等差数列，则角B等于(　　)。

A．30° B．60° C．90° D．120°

3．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公差$d=3$，若$a_n=2017$，则$n=$( )。

A．669 B．665 C．671 D．673

二、填空题

1．已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=3n$，则其公差是________。

2．数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2n+5$，则此数列为________(填序号)。

(1) 是公差为 2 的等差数列； (2) 是公差为 5 的等差数列；

(3) 是首项为 5 的等差数列； (4) 是公差为 n 的等差数列。

3．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16$，$a_4=1$，则a_{12}的值是________。

三、解答题

1．已知数列$\{a_n\}$为等差数列$a_3=\frac{5}{4}$，$a_7=-\frac{7}{4}$，求a_{12}。

2．已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_3=-6$，$a_6=0$，求$\{a_n\}$的通项公式。

拓展训练

1．已知 3 个数成等差数列,其和为 15,首末两项积为 9，求这三个数。

2．一个直角三角形三边长 $a.B.c$ 成等差数列，面积为 12，则它的周长为多少？

6.2.3 等差数列的前 n 项和公式

【知识回顾】

1．等差数列的前 n 项和公式：

已知条件	首项a_1、项数n和末项a_n	首项a_1项数n和公差d
选用公式	$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$	$s_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

2．推导等差数列的前n项和的方法是<u>倒序相加法</u>。

【典例分析】

例 1．已知等差数列$-8,-5,-2,1$，…，求前 20 项的和。

解：由题意可知$a_1=-8,d=3$

$$\because\ s_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$\therefore\ s_{20}=20\times(-8)+\frac{20\times19}{2}\times3=410$$

例 2．在等差数列$\{a_n\}$中，根据已知条件求解：

(1) $a_1=\frac{5}{6}$，$a_n=-\frac{3}{2}$，$s_n=-5$，求n和d；

(2) $a_1=4$，$s_8=172$，求a_8和d；

(3) $d=2$，$a_n=11$，$s_n=35$，求a_1和n。

解：(1) 由题意，得

$s_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(\frac{5}{6}-\frac{3}{2})}{2}=-5$，解得 $n=15$。

又 $a_{15}=\dfrac{5}{6}+(15-1)d=-\dfrac{2}{3}$，$\therefore d=-\dfrac{1}{6}$。

(2) 由已知，得 $s_8=\dfrac{8(a_1+a_8)}{2}=\dfrac{8(4+a_8)}{2}=172$，解得 $a_8=39$。

又$\because$ $a_8=4+(8-1)\ d=39$，$\therefore d=5$。

(3) 由 $\begin{cases} a_n=a_1+(n-1)d \\ s_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1+2(n-1)=11 \\ na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=35 \end{cases}$，解方程组得 $\begin{cases} n=5 \\ a_1=3 \end{cases}$，或 $\begin{cases} n=7 \\ a_1=-1 \end{cases}$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．已知等差数列的前 4 项为 1，4，7，10，$s_n=($　　$)$。

A．$\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$　　B．$\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$　　C．$3n^2-n$　　D．$\dfrac{3}{2}n^2-n$

2．设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=3$，$a_6=11$，则 S_7 等于(　　)。

A．13　　B．35　　C．49　　D．63

3．设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=2$，$d=3$，则 $s_5=$(　　)。

A．32　　B．35　　C．30　　D．40

4．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=-5$，$a_{10}=13$，则 $s_{10}=($　　$)$。

A．60　　B．70　　C．40　　D．80

二、填空题

1．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{30}=30$，则 $s_{30}=$________。

2．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$d=-2$，则 $s_8=$________。

3．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$s_n=n^2+n$，则 $a_6=$________。

三、解答题

1．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$d=\dfrac{1}{2}$，求 s_7；

2．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=10$，$a_6=-2$，求 a_4 和 s_8。

能力提升

一、选择题

1．设 s_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=3$，$a_6=11$，则 $s_7=($　　$)$。

A．13　　B．35　　C．49　　D．63

2．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d=2$，$s_{20}=60$，则 $s_{21}=$(　　)。

A．100　　B．84　　C．66　　D．62

二、填空题

1．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_3+a_5=14$，其前n项和$S_n=100$，则$n=$________。

2．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为s_n，若$a_6=s_3=12$，则$\{a_n\}$的通项$a_n=$________。

三、解答题

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为s_n，$a_2=-7, s_9=-9$，求s_{16}。

拓展训练

一个等差数列的前10项之和为100，前100项之和为10，求前110项之和。

6.2.4 等差数列的应用举例

【知识回顾】

银行存款的年利率与月利率的关系是，月利率=__________。

【典例分析】

例．王先生为今年上高中的女儿办理了“教育储蓄”，已知当年“教育储蓄”存款的月利率是2.7‰，欲在3年后一次支取本息合计2万元，王先生每月大约存入多少元(精确到1元)?

解：设王先生每月存入x元，则有

$$x(1+2.7‰)+x(1+2\times2.7‰)+\cdots+x(1+36\times2.7‰)=20000$$

$$x(36+36\times2.7‰+\frac{36\times35}{2}\times2.7‰)=20000$$

解得　　　$x\approx529$元。

【能力检测】

一、选择题

1．一个卷筒纸，其内圆直径为4cm，外圆直径为12cm，一共卷60层，若把各层都视为一个同心圆，π取3.14，则这个卷筒纸的长度为(精确到个位)(　　)。

A．14m　　B．15m　　C．16m　　D．17m

2．三角形的三内角A，B，C成等差数列，则B=(　　)度。

A．30　　B．45　　C．60　　D．90

二、填空题

1．某工厂2011年的月产值按等差数列增长，第一季度总产值为20万元，上半年总产值为60万元，则2011年全年总产值为__________元。

2.《九章算术》“竹九节”问题：现有一根9节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面4节的容积共3升，下面3节的容积共4升，则第5节的容积为________升。

三、解答题

1．小吴采用零存整取方式在银行存款，从元月份开始，每月第1天存入银行3000元，银行以年利率1.8%计息，试问：年终结算本利和是多少(精确到0.01元)?

2．一个屋顶的某一个斜面成等腰梯形，最上面一层铺了20块瓦片，往下每一层多铺一块瓦片。斜面上铺了21层瓦片，问共铺了多少块瓦片？

6.3　等比数列

6.3.1　等比数列的定义

【知识回顾】

1．如果一个数列从第 2 项起，每一项________它的前一项所得的比都等于________，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的_______，公比通常用_____表示。

2．若数列$\{a_n\}$为等比数列，q为公比，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，即$a_{n+1}=a_nq$。

【典例分析】

例．在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=5,q=3$，求a_2,a_3,a_4,a_5。

解：$a_2=a_1q=5\times3=15$；　　$a_3=a_2q=15\times3=45$，

$a_4=a_3q=45\times3=135$；　　$a_5=a_4q=135\times3=405$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列各个数列中成等比数列的是(　　)。

A．0，2，4，8，…　　B．1，2，3，4, …

C．1，$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$　…　　D．-3,-1,1,3,…

2．数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=2\times3^{n-1}$。则数列(　　)。

A．是公差为2的等差数列　　B．是公比为2的等比数列

C．是项为3的等差数列　　D．是公比为3的等比数列

二、填空题

1．已知等比数列 64，16，4，…，此等比数列的公比$q=$______，第四项$a_4=$______，第五项$a_5=$________。

2．在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1,q=\frac{1}{2}$，则$a_3=$_______。

三、解答题

1．写出等比数列 27，9，3，1，…的第 5 项和第 6 项。

2．在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=3,q=-2$，求a_2至a_5。

能力提升

已知等比数列的通项公式为$a_n=3^n$，则a_1，q分别为(　　)

A．3，3　　B．3，1　　C．1，3　　D．1，1

6.3.2　等比数列的通项公式

【知识回顾】

等比数列的通项公式：设等比数列$\{a_n\}$的公比为d，则通项公式为$a_n=$ ________，即只要已知等比数列$\{a_n\}$的 ________ 和 ________ ，就可以直接计算出数列中的任何一项，而且通项公式中共有四个量a_1,a_n,q,n ，只要知道了其中的________个量，就可以通过解方程求出另外一个量。

【典例分析】

例．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=-\dfrac{1}{25}$，$a_5=-5$，求a_7。

解：∵　$a_2=-\dfrac{1}{25}$，$a_5=-5$，

∴　$a_1q=-\dfrac{1}{25}$，

$a_1q^4=-5$。

解得　$a_1=-\dfrac{1}{125}$，$q=5$。

∴　$a_7=a_1q^6=-\dfrac{1}{125}\times5^6=-125$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_7=64$，则$a_3=$(　　)。

A．±4　　B．4　　C．-4　　D．8

2．在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2=3$，$a_6=48$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为(　　)。

A．$\dfrac{3}{2}\cdot2^n$　　B．$\dfrac{3}{2}\cdot2^{n-2}$　　C．$3\cdot2^{n-2}$　　D．$3\cdot2^{n-1}$

二、填空题

1．在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2$，$a_5=32$，则$a_n=$________。

2．在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=3$，$q=3$，若$a_n=729$，则$n=$________。

3．已知数列2，x，8，…成等比数列，则$x=$________。

4．在等比数列$\{a_n\}$中，$q=\sqrt{3}$，$a_6=27$，则$a_1=$________。

三、解答题

1．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_4=-8$，求通项公式。

2．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=3,a_5=81$，求首项a_1和公比q。

能力提升

一、选择题

1．如果－1，a,b,c，-9 成等比数列，那么(　　)。

A．$b=3$，$ac=9$　　B．$b=-3$，$ac=9$

C．$b=3$，$ac=-9$　　D．$b=-3$，$ac=-9$

2．等比数列 x，$3x+3$，$6x+6$，…的第 4 项等于(　　)。

A．-24　　B．0　　C．12　　D．24

二、填空题

1．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=2$，$a_6=8$，则 $a_n=$________。

2．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=3$，$a_{10}=384$，则公比 $q=$________。

三、解答题

在 160 与 5 中间插入 4 个数，使它们同这两个数成等比数列，求这 4 个数。

拓展训练

有四个数，前三个数成等比数列，其和为 19，后三个数成等差数列，其和为 12，求这四个数。

6.3.3　等比数列的前 n 项和公式

【知识回顾】

1．设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，首项为 a_1，公比为 q，则其前 n 项和

$$s_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_n q}{1-q},q\neq 1\\ na_1,q=1\end{cases}$$

2．在求等比数列前 n 项和时，一定要判断公比 q 是否为________。

【典例分析】

例 1　在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $s_n=189$，$q=2$，$a_n=96$，求 a_1 和 n。

解：由公式 $s_n=\dfrac{a_1-a_n q}{1-q}$ 及条件得

$$189=\frac{a_1-96\times 2}{1-2},$$

解得　$a_1=3$。

又由 $a_n=a_1q^{n-1}$，得

$96=3\times 2^{n-1}$，解得　$n=6$。

例 2　在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $q=2$，$s_4=1$，求 s_8。

解：设首项为 a_1，

∵ $q=2$，$s_4=1$，

$\therefore \dfrac{a_1(1-2^4)}{1-2}=1$，即 $a_1=\dfrac{1}{15}$。

$\therefore s_8=\dfrac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\dfrac{\frac{1}{15}(1-2^8)}{1-2}=17$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和s_n，已知$a_1=2$，$a_2=4$，那么s_{10}等于(　　)。

A．$2^{10}+2$　　B．2^9-2　　C．$2^{10}-2$　　D．$2^{11}-2$

2．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=3, q=-2$，则s_4为(　　)。

A．15　　B．－15　　C．24　　D．－24

3．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{3}{5}, q=4$，$s_n=51$，则$n=$(　　)。

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

二、填空题

1．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{3}, \mathrm{q}=2, n=4$，前 n 项和$s_n=$__________。

2．等比数列 2，4，8，…的前 8 项和$s_8=$__________。

3．已知数列 27，-9，3，…成等比数列，则前 6 项和$s_6=$________。

三、解答题

1．在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，$a_4=8$，求：

(1) 数列$\{a_n\}$的通项公式；　　(2) 数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n。

2．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=9$，$a_6=-243$，求s_6。

能力提升

一、选择题

1．等比数列$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{9}{4}$，$\dfrac{27}{8}$，…，则$s_4=$(　　)。

A．$\dfrac{195}{16}$　　B．$\dfrac{65}{16}$　　C．$\dfrac{195}{8}$　　D．$\dfrac{65}{8}$

2．在等比数列$\{a_n\}$中，$s_n=3^n-1$，则$a_6=$（　　)。

A．162　　B．486　　C．243　　D．992

二、填空题

1．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2a_6=8$，则$a_3a_5=$__________。

2．已知数列 4，x，9 成等比数列，则$x=$__________。

三、解答题

1．已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{3}$，公比$q=\dfrac{1}{3}$，求该数列的前n项和。

2．已知s_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，$s_n=93$，$a_n=48$，公比$q=2$，求项数n。

拓展训练

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3+2^n$，求a_n。

6.3.4　等比数列的应用举例

【知识回顾】

贷款一般采用___________ 法，含义是将前期的本金及利息的和(简称本利和)作为后一起的本金来计算利息，俗称“利滚利”。

【典例分析】

例．小陆计划年初向银行贷款 10 万元用于买房，他选择 10 年期贷款，偿还贷款的方式为分 10 次等额归还，每年一次，并从贷后次年年初开始归还，若 10 年期贷款的年利率为 4%，且年利息均按复利计算，问每年应还多少元（计算结果精确到 1 元）？

解：设每年还款x元，则第 1 次偿还x元，在贷款全部付清时的价值为$x(1+4\%)^9$；第 2 次偿还的x元，在贷款全部付清时的价值为$x(1+4\%)^8$；第 10 次偿还的x元，在贷款全部付清时的价值为x元，于是有：

$$10^5(1+4\%)^{10}=x(1+4\%)^9+x(1+4\%)^8+x(1+4\%)^7+\cdots+x$$

由等比数列求和公式，得

$$10^5\times1.04^{10}=\frac{1.04^{10}-1}{1.04-1}\cdot x,\ 1.04^{10}=(1+0.04)^{10}\approx1.4802。$$

$$\therefore x\approx\frac{10^5\times1.4802\times0.04}{0.4802}\approx12330。$$

答：每年约应还 12330 元。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．某人从 2011 年 1 月份开始，每月初存入银行 100 元，月利率是 2.8‰(每月按复利计算)，到 12 月底取出本利和应是(　　)。

A．1223.4元　　B．1224.4元　　C．1222.1元　　D．1225.0元

2．现存入银行 8 万元，年利率为 2.50%，若采用 1 年期自动转存业务，则 5 年末的本利和是____________万元。

A．8×1.025^3　　B．8×1.025^4　　C．8×1.025^5　　D．8×1.025^6

二、填空题

1．据某校环保小组调查，某区垃圾量的年增长率为 b,2007 年产生的垃圾量为 a 吨，由此预测，该区下一年的垃圾量为__________吨，2012 年的垃圾量为____________吨。

2．某工厂生产总值的月平均增比率为 p,则年平均增长率为_____________。

三、解答题

1．某人从银行贷款 30000 元，贷款期限为 2 年，年利率为 4.80%，计算到期后，此人应偿还银行多少元(保留到个位)？

2．一个蜂巢里有 1 只蜜蜂，第 1 天，它飞出去找回了 2 个伙伴；第 2 天，3 只蜜蜂飞出去，各自找回了 2 个伙伴……如果这个找伙伴的过程继续下去，第 6 天所有的蜜蜂都归巢后，蜂巢中一共有多少只蜜蜂？

能力提升

一、选择题

1．某工厂去年产值为 a，计划 5 年内每年比上一年产值增长 10%，从今年起 5 年内这个工厂的总产值是(　　)

A．$1.1^4 a$　　B．$1.1^5 a$　　C．$10(1.1^5-1)a$　　D．$11(1.1^5-1)a$

2．某同学在电脑上设置一个游戏，他让一弹性球从 100m 高处自由落下，每次着地后又跳回到原来高度的一半再落下，则第 10 次着地时所经过的路程和为(　　)。

A．199.8m　　B．299.6m　　C．166.9m　　D．266.9m

二、填空题

1．某工厂生产总值连续两年的年平均增长率依次为 p%，r%，则这两年的平均增长率是______。

2．通过测量知道，温度每降低 6℃，某电子元件的电子数目就减少一半。已知在零下 34℃时，该电子元件的电子数目为 3 个，则在室温 27℃时，该元件的电子数目接近____个。

三、解答题

1．某家庭打算在 2017 年的年底花 40 万元购一套商品房，为此，计划从 2011 年年初开始，每年年初存入一笔购房专用款，使这笔款到 2017 年年底连本带利共有 40 万元。如果每年的存款数额相同，依年利率 2.50%并按复利计算，问每年年初应该存入多少钱 (不考虑利息税) ？

2．某工厂去年的产值为 138 万元，预计今后五年的每年比上一年产值增长 8%，从今年起计算，第 5 年这个工厂的产值是多少元？(精确到万元)

拓展训练

某城市 2002 年底人口为 500 万，人均居住面积为 6 平方米，如果该城市每年人口平均增长率为 1%,每年平均新增住房面积为 30 万平方米，到 2012 年底该城市人均住房面积是多少平方米？增加了还是减少了？说明了什么问题？(精确到 0.01 平方米)

测试题

一、单项选择题（共32分）

1．数列−1，1，−1，1，…的一个通项公式是(　　　)。

A．$a_n=(-1)^n$　　B．$a_n=(-1)^{n+1}$　　C．$a_n=-(-1)^n$　　D．$a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$

2．等差数列 1，5，9，…前 10 项的和是(　　　)。

A．170　　B．180　　C．190　　D．200

3．x，y，z 成等差数列且 $x+y+z=18$，则 $y=$(　　　)。

A．18　　B．8　　C．9　　D．6

4．等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=2$，$a_4=32$，则公比 $q=$（　　　）。

A．4　　B．−4　　C．4或−4　　D．16

5．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-5$，那么 $a_{2n}=$(　　　)。

A．$2n-5$　　B．$4n-5$　　C．$2n-10$　　D．$4n-10$

6．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=9$，$a_7=6$，则 $a_9=$(　　　)。

A．4　　B．3　　C．5　　D．6

7．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_7=1$，那么 $a_4=$(　　　)。

A．1　　B．−1　　C．±1　　D．$\frac{1}{2}$

8．已知数列$\{a_n\}$的首项为 1，以后各项由公式 $a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$ 给出，则这个数列的一个通项公式是(　　　)。

A．$a_n=3n-2$　　B．$a_n=4n-3$　　C．$a_n=n+2$　　D．$a_n=2n-1$

二、填空题

1．已知数列 $a_n=n^2-n$，则 $a_4=$ ________________。

2．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{9}{8}$，$a_n=\frac{1}{3}$，公比 $q=\frac{2}{3}$，则 $n=$__________。

3．一个数列的通项公式是 $a_n=n(n+1)$，则 $a_{11}=$____，56 是这个数列的第_____项。

4．已知三个数 $\sqrt{3}+1$，A，$\sqrt{3}-1$，成等差数列，则 $A=$ ______。

三、解答题（共52分）

1．一个等差数列的第 2 项是 5，第 6 项是 21，求它的通项公式及第 51 项。

2．等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=6$，$s_4=48$，求 a_1。

3．已知等比数列的前 5 项和是 242，公比是 3，求它的首项。

4．在 8 和 200 之间插入 3 个数，使 5 个数成等比数列，求这 3 个数。

5．一辆汽车价值 20 万元，1 年后折旧率为 20%，以后每年折旧率为 10%，问 5 年后该汽车的价值是多少？

第 7 章　平面向量

7.1　平面向量的概念及线性运算

【知识回顾】

一、平面向量的概念

1. 既有__________又有_______的量叫做向量。通常使用_______________来表示向量；A 为起点，点 B 为终点的向量记作_________，也可以记作________；向量的_____________叫做向量的模，$\overline{AB}$ 的模记作__________，向量 a 的模记作_______。

2．模为零的向量叫做_______，记作________，且零向量的方向是____________。

3．模为___________的向量叫做单位向量。

4．方向_________________________________的两个非零向量叫做互相平行的向量，向量 a 与向量 b 平行记作______________；规定：零向量与______________都平行。由于任意一组互相平行的向量都可以______________________，因此互相平行的向量又叫做_______向量。

5．当向量 a 与向量 b 的模_______并且方向______时，称向量 a 与向量 b 相等，记作__________。

6．与非零向量 a 的模________，且方向________的向量叫做向量 a 的负向量，记作________；规定：零向量的负向量仍为___________。

二、平面向量的线性运算

1．求向量的__________运算叫做向量的加法，运算的结果仍然是_____；求向量和的方法有两种，分别是______________和________________。

2．起点相同的两个向量 a 与 b，其差 $a-b$ 仍然是一个________，叫做 a 与 b 的差向量，其起点是________________，终点是_______________________。

3. 实数 λ 与向量 a 的积是一个向量，记作______，它的模为 $|\lambda a|=$__________；且若 $|\lambda a|\neq 0$，则当 $\lambda>0$ 时 λa 的方向与 a 的方向__________，当 $\lambda<0$ 时，λa 的方向与 a 的方向_________；数与向量的运算叫做向量的数乘运算。

4．$\lambda a+\mu b$ 叫做 a 与 b 的一个_________________。

5．向量的加法、减法和数乘运算都叫做_________________。

【典例分析】

例．如图 2-20 所示，设 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，分别写出图中：(1)与向量 $\overrightarrow{DO},\overrightarrow{EO},\overrightarrow{FO}$ 相等的向量；(2)与 $\overrightarrow{DC}$ 共线的向量；(3)与 $\overrightarrow{AB}$ 的模相等的向量。

分析：用相等向量、共线向量的定义求解。

解：(1) $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB},\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DC},\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$

(2) $\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{EO}$、$\overrightarrow{AF}$

(3) $\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{ED}$、$\overrightarrow{FE}$、$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{DO}$、$\overrightarrow{EO}$、$\overrightarrow{FO}$

点评：用定义解题是解决数学问题的常见方法。

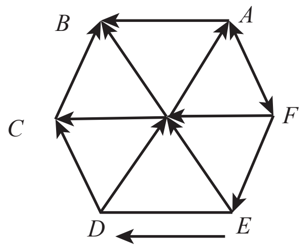


图 2-20

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．设 O 是正三角形 ABC 的中心,则向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{BO}$、$\overrightarrow{OC}$是　(　　)。

A．有相同的起点　　B．平行向量　　C．模相等的向量　　D．相等向量

2．下列各物理量中,不能称为向量的是 (　　)。

A．速度　　B．位移　　C．力　　D．功

3．在△ABC 中,$\overrightarrow{BC}=a$,$\overrightarrow{CA}=b$,则$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$=(　　)。

A．$a+b$　　B．$-(a+b)$　　C．$a-b$　　D．$a-b$

二、填空题

1．$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$=____________。

2．$\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}$=______________。

三、解答题

化简：(1)$4(a-2b)-3(2a+b)$　　　(2)$3a-2(2a-b)+3(a-b)$

能力提升

一、选择题

1．两向量共线是两向量相等的(　　)。

A．充分不必要条件　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　D．既不是充分条件也不是必要条件

2．在平行四边形 $ABCD$ 中,若$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$,则必有(　　)。

A．$\overrightarrow{AD}=0$　　B．$\overrightarrow{AB}=0$或$\overrightarrow{AD}=0$　　C．$ABCD$为正方形　　D．$ABCD$为矩形

二、填空题

1．化简 $5(3a-2b)+4(2b-3a)$=______________________。

2．已知 $a=3e$,$b=-2e$,则向量 a 与 b 的位置关系是 ___________________________。

三、解答题

已知平行四边形 $ABCD$,设$\overrightarrow{AB}=a$,$\overrightarrow{AD}=b$,试用 a 或 b 表示(1)$\overrightarrow{CD}$ ，$\overrightarrow{CB}$ ；(2)$\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{CA}$。

拓展训练

飞机从甲地按北偏西 15°的方向飞行 2400km 到达乙地,再从乙地按南偏东 75°的方

向飞行 2400km 到达丙地。那么丙地在甲地的什么方向?丙地距甲地多远?

7.2　平面向量的坐标表示

【知识回顾】

1．设 i、j 分别是平面直角坐标系内 x 轴和 y 轴上的单位向量,对任何一个平面向量 a,都存在着一对有序实数对(x,y),使得 $a=xi+yj$。则________叫做向量 a 的坐标,记作______。

2．起点为 $A(x_1,y_1)$,终点为 $B(x_2,y_2)$的向量$\overrightarrow{AB}$的坐标为__________。

3．在平面直角坐标系中,设 $a=(x_1,y_1)$,$b=(x_2,y_2)$,则 $a+b=$________，$a-b=$_________，$\lambda a=$_________。

4．设非零向量 $a=(x_1,y_1)$,$b=(x_2,y_2)$,则 $a\parallel b=$______________________________。

【典例分析】

例 1．已知 $a=(4, y)$, $b=(6, 3)$, 且 $a\parallel b$, 求 y。

分析：利用关于向量平行条件的坐标表示：$a\parallel b=x_1y_2-x_2y_1=0$。

解：$\because a\parallel b \therefore 4\times3-y\times6=0 \quad \therefore y=2$

例 2．已知 $a=-2i+5j$,$b=3i-2j$,求 $2a-3b$。

分析：可以将向量 $A.b$ 分别用单位向量 i、j 代替,再进行计算,也可以直接用坐标进行计算。

解法 1：$2a-3b=2(-2i+5j)-3(3i-2j)=-4i+10j-9i+6j=-13i+16j$

解法 2：因为 $a=(-2,5)$,$b=(3,-2)$,所以 $2a-3b=2(-2,5)-3(3,-2)=(-4,10)-(9,-6)=(-13,16)$,即 $2a-3b=-13i+16j$。

点评：这两种解法都是常用的方法，直接写出坐标比较简单。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．已知向量 $a=(2,3)$,$b=(x,y)$,若 $a\parallel b$,则　(　)。

A．$2x-3y=0$　　B．$2x+3y=0$　　C．$2y-3x=0$　　D．$2y+3x=0$

2．已知 $a=(-2,8)$，则$\frac{1}{2}a$ 的坐标是(　)。

A．(−1, 8)　　B．(−1, 4)　　C．(2, −4)　　D．(−2, 4)

二、填空题

1．已知 $a=5i+2j$,$b=2i-j$,则 $4a+3b=$______________。

2．已知三点 $A(1,2)$,$B(-3,-4)$,$C(x,3.5)$共线,则 $x=$__________。

3．已知 $A(3，5)$,$B(6，9)$,则$\overrightarrow{AB}=$____________,$\overrightarrow{BA}=$___________。

4．已知 $a=(-2,4)$,$b=(5,2)$, 则 $a+b=$_______________,$a-b=$_____________，$6a=$___________。

三、解答题

已知 $A(-2,-3)$,$B(2,1)$,$C(1,4)$,$D(-7,-4)$，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是否共线?

能力提升

一、选择题

1．已知 $a=(2,3)$，$b=(x,-6)$，且 $a\parallel b$，则 $x=$(　　)

A．-4　　B．4　　C．9　　D．-9

2．已知点 $A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(1,2)$，$D(x,1)$，如果$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，则 $x=$(　　)

A．1　　B．2　　C．0　　D．-2

二、填空题

1．已知 $a=(0,4)$，$b=(-5,8)$，则 $2a+b=$____________，$3a-4b=$____________。

2．已知$\overrightarrow{AB}=(3，7)$，点 A 的坐标为$(-2,5)$，则点 B 的坐标为____________。

三、解答题

已知 $A(-1,-1)$，$B(1,3)$，$C(2,5)$，求证 A、B、C 三点共线。

7.3　平面向量的内积

【知识回顾】

1．设有两个非零向量 a，b，作$\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，由________________叫做向量 a 与向量 b 的夹角，记作____________。

2．两个向量 $a.b$ 的____________与________________叫做向量 a 与向量 b 的内积，记作____________，即 $a\cdot b=$____________。

3．$\cos\langle a,b\rangle=$____________；$|a|=$____________；$a\cdot b=0\Leftrightarrow$____________。

4．设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，则 $a\cdot b=$____________________；当 a，b 是非零向量，则 $\cos(a,b)=$________，利用这个公式可以求两个向量的________。$a\perp b\Leftrightarrow$________。________利用这个公式可以研究两个向量的________问题；设 $a=(x,y)$，则$|a|=$____________，利用这个公式可以求向量的________________。

【典例分析】

例．已知$|a|=6$，$|b|=4$，a 与 b 的夹角为 $60°$，求$(a+2b)\cdot(a-3b)$

分析：利用运算律求解。

解：$(a+2b)\cdot(a-3b)=a\cdot a-a\cdot b-6b\cdot b=|a|^2-a\cdot b-6|b|^2=|a|^2-|a||b|\cos\theta-6|b|^2=6^2-6\times4\times\cos60°-6\times4^2=-72$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．已知向量 $a=(3,4)$，$b=(4,-3)$，则向量 a 与向量 b 的关系是(　　)。

A．平行向量　　B．相反向量　　C．垂直向量　　D．无法确定

2．已知$|a|=8$，$|b|=6$，$\langle a，b\rangle=60°$，则 $a\cdot b=$(　　)。

A．48　　B．24　　C．$24\sqrt{3}$　　D．$24\sqrt{2}$

3．已知向量 $a=(3,6)$，$b=(5,-3)$，则 $a\cdot b=$(　　)。

A．-3　　B．3　　C．-39　　D．4

4．已知 $a \bullet a=12$，则$|a|$=(　)。

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．3

二、填空题

1．已知向量 $a=(-2,1)$与向量 $b=(3,m)$垂直，则 $m=$ ______________。

2．已知$|a|=5$,$|b|=4$，$<a,b>=120°$,则 $a \bullet b$=________________。

3．已知 $a \bullet b=5$，$|a||b|=10$，则$<a,b>$=_____________________。

三、解答题

已知 $A(2，-4)$,$B(-1，3)$,求$|\overrightarrow{AB}|$。

能力提升

一、填空题

1．已知$|a|=3$,$|b|=4$，$<a,b>=60^0$，则$(a+2b)\cdot(a-3b)$=______________________。

2．已知 $a=(-3,1)$，$b=(2,5)$，则 $a \bullet b$=______________，$|a|$=_____________。

3．已知$|a|=12$,$|b|=9$，$a \bullet b=54\sqrt{2}$,则$<a,b>$=___________________。

二、解答题

已知 $A(1,2)$,$B(2,3)$,$C(-2,5)$,求证 △ABC 是直角三角形

测试题

一、选择题（共32分）

1．下面结论中错误的是(　　　)。

A．具有方向的线段叫有向线段　　B．两个共线向量的方向相同

C．同向且等长的有向线段表示同向量　　D．零向量的方向不确定

2．$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$等于(　　)。

A．$2\overrightarrow{BC}$　　B．2 $\overrightarrow{CB}$　　C．0　　D．0

3．若 a 是非零向量，则下列各式中正确的是(　　)。

A．$0 \cdot a=0$　　B．$a \cdot a=|a|$　　C．$a-a=0$　　D．$0a=0$

4．已知点 $A(a,0)$,$B(b,0)$,则$|\overrightarrow{AB}|$=(　　)。

A．$|a-b|$　　B．$a-b$　　C．$b-a$　　D．$\sqrt{a^2+b^2}$

5．下列各对向量中，共线的是(　　)。

A．$a=(2,3)$，$b=(3,-2)$　　B．$a=(2,3)$，$b=(-4,-6)$

C．$a=(1,2)$, $b=(-2, 2)$　　D．$a=(4,7)$, $b=(7,4)$

6．下列各向量中，与向量 m =(3，2)垂直的是(　　)。

A．$a=(2,3)$　　B．$b=(-4,6)$　　C．$c=(3,2)$　　D．$d=(-3,-2)$

7．已知$|a|=3$，$|b|=2$，$a \bullet b=-3$，则$<a,b>$=(　　)。

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

8．已知向量 $a=(-2,1)$，$b=(3,-4)$，且 $a \bullet c=-1$，$b \bullet c=9$，则 c 的坐标是(　　　)。

A．$(-1,-3)$　　B．$(-1，3)$　　C．$(1,3)$　　D．$(1,-3)$

二、填空题（共16分）

1．设点 $A(-2,2)$、$B(4，6)$，则向量$\overrightarrow{OA}$的坐标是________，向量$\overrightarrow{OB}$的坐标是_______。

2．已知 $a=(0,3)$，$b=(-2,-5)$，则 $a-2b=$ _________。

3．已知$|a|=2$，$|b|=3$，$\langle a,b\rangle=60°$，则 $a\cdot b=$___________。

4．设点 $A(0,1)$、$B(2，4)$、$C(-1,-3)$，且$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则点 D 的坐标是 _________。

三、解答题（共52分）

1．设$\overrightarrow{AB}=i+2j$，$\overrightarrow{BC}=3i-j$，$\overrightarrow{CD}=-4i+j$，求$\overrightarrow{AD}$。

2．已知 $a=(3，-1)$，$b=(1，-2)$，求$(2a+3b)\cdot(a-b)$。

3．已知三点 $A(1，2)$、$B(-6，m)$、$C(-1,4)$共线，求实数 m 的值。

4．已知三点 $A(-3，4)$、$B(3，2)$、$C(2，-1)$，求证$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$。

5．如图 2-21 所示，矩形 $ACDF$ 中，$AC=2CD$，B、E 分别是 AC、DF 的中点，写出：(1)与$\overrightarrow{CD}$相等的向量；(2)与$\overrightarrow{AB}$的负向量相等的向量；(3)与$\overrightarrow{BE}$共线的向量。

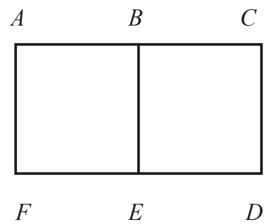


图 2-21

第 8 章　直线和圆的方程

8.1　两点间的距离与线段中点的坐标

8.1.1　两点间的距离

【知识回顾】

1．坐标轴上的两点$M_1(a)$与 $M_2(b)$的距离｜M_1M_2 ｜=________________。

2．在平面直角坐标系中，设点$P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$，则 $\overrightarrow{P_1P_2}$ = ________________。

3．$P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$两点间的距离，就是线段P_1P_2的___________，也是向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的_________，则｜ P_1P_2 ｜= _____________________。

【典例分析】

例．求 $A(1,-1)$、$B(-2,1)$两点间的距离。

解：A、B 两点间的距离为

｜AB｜$=\sqrt{\left[-2-1\right]^2-\left[1-(-1)\right]^2}=\sqrt{13}$ 。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．点 $A(0,3)$，$B(0,-5)$的距离是(　　)。

A．5　　　B．2　　　C．3　　　D．8

2．点 $A(3,\ 1)$与 $B(5,\ -1)$的距离是(　　)。

A．4　　　B．2　　　C．$2\sqrt{2}$　　　D．1

二、填空题

1．如果x轴上的两点M_1与M_2 的坐标分别为5与3，那么M_1与M_2 的距离｜M_1M_2 ｜=____

2．点 $A(0,\ -2)$，$B(0,2)$的距离为________。

3．在数轴上,与原点距离等于 5 的点的坐标是________。

三、解答题

求下列两点间的距离：

1．$A(-3,1)$，$B(4,2)$

2．$A(-1,1)$，$B(2,3)$

能力提升

1．求两点$P_1(3,\ -2)$，$P_2(-2,\ -3)$的距离。

2．求两点$P_1(4，1)$，$P_2(5，0)$的距离。

3．已知点$M(-1,2)$，$N(4，b)$，并且｜MN｜$=\sqrt{34}$，求 b 的值。

拓展训练

1．在 x 轴上有一点 M，它与点 $N(-1,2)$的距离是$\sqrt{13}$，求点 M 的坐标。
2．已知三角形的顶点式 $A(6，3)$，$B(1,1)$,$C(1,5)$，求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形。

8.1.2　线段中点的坐标

【知识回顾】

1．坐标轴上的两点 $M_2(a)$与 $M(b)$的中点坐标为___________。

2．一般地，设点 $P_1(x_1，y_1)$、$P_2(x_2，y_2)$为平面内任意两点，则线段P_1P_2中点 $P_0\ (x_0，y_0)$的坐标为________________。

【典例分析】

例 1．已知点 $M(2，-1)$、$N(6,3)$，求线段 MN 的中点 P 的坐标。
解：根据中点坐标公式可知线段 MN 的中点 P 的坐标是$(4,1)$。
例 2．已知 $A(0,7)$、$B(2,1)$、$C(-4,1)$，求三角形 ABC 中 AC 边上的中线 BD 的长度。
解：设 AC 的中点 D 的坐标为$(x_D，y_D)$，则由点 $A(0,7)$、$C(-4,1)$得

$$x_D=\frac{0+(-4)}{2}=-2，y_D=\frac{7+1}{2}=4$$

即点 D 的坐标是$(-2,4)$。

根据两点距离公式｜BD｜$=\sqrt{[(-2)-1]^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$

即三角形 ABC 中 AC 边上的中线 BD 的长度为$3\sqrt{2}$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．点 $A(5)$与 $B(-1)$的中点坐标是(　　)。
　A．(0，0)　　B．(0，2.5)　　C．(0，−2.5)　　D．(2.5，−2.5)

2．点 $A(0，0)$与 $B(4，-2)$的中点坐标是(　　)。
　A．(0，0)　　B．(2，−1)　　C．(0，−1)　　D．(2，−1)

二、填空题

1．若点 $A(2)$，线段 AB 的中点坐标为 6，则点 B 的坐标为__________。

2．点 $M(2，3)$与点 $N(-1,5)$的中点坐标___________。

三、解答题

1．已知点 $P_1(-1，-5)$，$P_2(2,3)$，求线段 P_1P_2 的长度，并求线段 P_1P_2 的中点的坐标。

2．在数轴上求点 Q 的坐标，是它到点 $M(2)$的距离与到点 $N(6)$的距离相等。

3．有一线段 AB，它的中点坐标是$(-2,1)$，端点 A 的坐标为$(0,2)$，求端点 B 的坐标。

能力提升

1．已知三角形 ABC 定点分别为 $A(0，0)$，$B(2,1)$，$C(-1,3)$，求此三角形三条中线的长度。

2．已知点 $A(2，y)$，$B(x,-6)$的中点是$(4,3)$，求 x、y 的值。

拓展训练

已知点 $A(3，-4)$，$B(1，-2)$，求点 A 关于点 B 的对称点 C 的坐标。

8.2　直线的方程

8.2.1 直线的倾斜角与斜率

【知识回顾】

1．直线的倾斜角是指直线________与 x 轴的_________所成的_____________；倾斜角 α 的正切叫做直线的____________；直线倾斜角α的取值范围是_______________；若已知 α 且 $\alpha\neq900$，则斜率$k=$_____________。

2. 若已知两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$为直线l上的任意两点，则直线l的斜率为__________。

3．几个常用特殊角的正切值：tan30°=_______；tan45°=______；tan60°=_______；tan120°=______；tan135°=_______；tan150°=________。

【典例分析】

例．求出下列直线的斜率：

(1) 直线的倾斜角为 60°

(2) 直线过点(3,5)与点(1,2)

解：(1) 因为直线的倾斜角为 60°，所以直线的斜率为 $k=\tan60°=\sqrt{3}$；

(2) 因为直线过点(3,5)与点(1,2)，所以由两点斜率公式 $k=\dfrac{2-5}{1-3}=\dfrac{3}{2}$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．在直线$3x+2y=1$ 上的点是(　　)。

A．(1,2)　　B．$(\frac{1}{3},1)$　　C．(2，3)　　D．$(0,\frac{1}{2})$

2．直线 x=3 的倾斜角是（　　)。

A．0°　　B．30°　　C．90°　　D．不存在

3．已知 $A(-5，2)$，$B(0，-3)$则直线 AB 斜率为（　　)。

A．-1　　B．1　　C．0　　D．3

二、填空题

1．过点 $M(-3,6)$与 $N(1,2)$的直线的倾斜角是__________。

2．直线 $y=2$ 的倾斜角是__________。

三、解答题

1．判断下列直线 AB 的倾斜角是否存在，若存在，求出倾斜角、斜率的值：

(1) $A(-8,2)$，$B(-8,-3)$；　　(2) $A(0,4)$，$B(\sqrt{3},5)$。

2．已知一条直线，过点 $P_1(2,3)$、$P_2(a,4)$，且倾斜角为 45°，求 a 的值

能力提升

1．直线 $2x-3y+1=0$ 的斜率是__________。

2．已知直线 l_1，l_2 的倾斜角为a_1和a_2，且 $l_1 // l_2$，$a_1=45°$，求直线 l_2 的倾斜角和斜率。

拓展训练

求过点(3,2)，倾斜角的余弦为$\frac{4}{5}$的直线方程。

8.2.2　直线的点斜式方程与斜截式方程

【知识回顾】

1．直线的点斜式方程是________________________。

2．直线l经过点 P_1（x_1，y_1），且平行或重合于 x 轴时，直线 l 的方程为______________，直线l经过点 P_1（x_1，y_1），且平行或重合于 y 轴时，直线 l 的方程为________________。

3．直线的斜截式方程是________________________。

4．直线l与 x 轴交于点 $A(a,0)$，与 y 轴交于点 $A(0,b)$，则 a 叫做直线l在________，b 叫做直线 l 在_________。

【典例分析】

例 1．已知直线l的倾斜角为 30°，且过点 $A(-1,2)$，求直线的方程。

解：这条直线l过点 $A(-1,2)$，其斜率为 $k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

带入方程，得 $y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}[x-(-1)]$，化简，得 $\frac{\sqrt{3}}{3}x-y+2-\frac{\sqrt{3}}{3}=0$

这就是所求直线的方程。

例 2．设直线l的倾斜角为 30°，并且经过点 $M(3,-1)$。

(1) 写出直线l的方程；

(2) 求直线l在 y 轴上的截距。

解：(1) 有直线l的倾斜角为 30°，故其斜率为 $K=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，由直线的点斜式方程得 $y-(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$。

(2) 将上面的方程整理为 $Y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2$，故直线l在 y 轴上的截距为-2。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．过点(1,3)且斜率为 2 的直线的点斜式方程为(　　)。

A．$y-3=x-1$　B．$y-1=2(x-3)x-1$　C　$y-3=2(x-1)x-1$　D．$y+3=2(x-1)$

2．直线 $y=5x+2$ 在 y 轴上的截距是（　　)。

A．5　B．-2　C．-5　D．2

3．已知直线l的斜率 $k=-1$，并且在 y 轴上的截距是 3 的直线是（　　)。

A．$y=-x-3$　B．$y=x-3$　C．$y=-x+3$　D．$y+3=-x$

二、填空题

1．过点 $M(1,-2)$,倾斜角为 0° 的直线方程为__________。

2．过点 $N(3,-2)$,倾斜角为 90° 的直线方程为__________。

3.直线 $y-1=x-2$ 的斜率 $k=$_________,倾斜角是__________,与 y 轴的截距是__________。

三、解答题

1．判断点 $A(2，-\dfrac{1}{2})$、$B(1,3)$是否为直线 $y=2x+1$ 上的点。

2．已知一条直线在 y 轴上的截距为 4，斜率为 2，写出此直线的方程。

能力提升

1．已知直线经过点 $M(3，-2)$，$N(2，-6)$，求出直线的斜率，再利用点斜式写出直线方程，

2．求过点(2,1)，且斜率为 2 的直线的斜截式方程。

拓展训练

分别求出直线 $y-3=2(x+1)$在 x 轴及 y 轴上的截距。

8.2.3　直线的一般式方程

【知识回顾】

直线的一般方程是____________;斜率为____________，在 y 轴上的截距为__________。

【典例分析】

例．将方程 $y-1=2(x-5)$化为直线的一般式方程，并分别求出该直线在 x 轴与 y 轴上的截距。

解：由方程 $y-1=2(x-5)$得

$2x-y-9=0$

这就是直线的一般式.在方程中令 $y=0$，则 $x=\dfrac{9}{2}$，故直线在 x 轴上的截距为 $\dfrac{9}{2}$；令 $x=0$，

则 $y=-9$，故直线在 y 轴上的截距为-9。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．直线$x+2y-1=0$ 的斜率是(　　)

A．$\frac{3}{2}$　　B．$-\frac{3}{2}$　　C $-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

2．过点(2，-2)，且斜率为 3 的直线一般式方程是(　　)

A．$2x-y+8=0$　　B．$3x-y+8=0$　　C．$2x+y+8=0$　　D．$3x-y-8=0$

3．直线方程 $y=\frac{1}{3}x+2$ 化为一般式方程为(　　)

A．$3x+y-6=0$　　B．$x+3y-6=0$　　C．$x-3y-6=0$　　D．$x-3y+6=0$

二、填空题

1．直线$3x-2y-1=0$ 的斜率是 ____________,在y 轴上的截距是 __________。

2．将直线 $y-1=\frac{1}{2}x+3$ 化为一般式方程为________________________。

三、解答题

1．求直线的一般方程：

(1) 过点(-1，4)，且斜率为 3；　　(2)过点(2，-1)，且平行于 x 轴。

2．求斜率为-1，且在 y 轴上截距为 3 的直线的一般式方程。

能力提升

1．已知直线l一般式方程为$x-y-3=1$

(1) 求直线的斜率；(2)求过点(-1,0)，斜率是直线l斜率 2 倍的直线方程。

2．将方程 $y+2=3(x-1)$化为直线的一般方程，并分别求出直线在 x 轴与 y 轴上的截距。

拓展训练

已知△ABC 的三个顶点 $A(1,2)$，$B(-3,0)$，$C(-5,6)$，求 BC 中点，且平行于 AB 的直线。

8.3　两条直线的位置关系

8.3.1　两条直线平行

【知识回顾】

1．当直线l_1、l_2 的斜率都是 0 时，两条直线都与__________，所以两直线的位置关系是________，当直线l_1、l_2 的斜率都不存在，两条直线都与__________，所以两直线的位置关系是________。

2．两直线有斜率且不重合时，如果两直线平行，则它们的斜率__________，反之，如果它们的斜率相等，则两直线的位置关系是__________。即__________________。

3．当直线l_1、l_2的斜率都存在时，设$l_1: y=k_1x+b_1$；$l_2: y=k_2x+b_2$，则其系数关系如表 2-8 所示。在表中填出其位置数。

表 2-8

两个方程的系数关系	$k_1 \neq k_2$	$k_1=k_2$	
		$b_1 \neq b_2$	$b_1=b_2$
两条直线的位置关系			

【典例分析】

例 1．判断下列各组直线的位置关系(相交、平行或重合)：

(1) l_1：$y=3x-1$，l_2：$y=2x+5$；

(2) l_1：$x-y+3=0$，l_2：$y=x+2$。

分析：分别将各直线的方程化成斜截式方程，通过比较斜率 k 和直线在 y 轴上的截距 b，判断两条直线的位置关系。

解：(1) 由直线l_1：$y=3x-1$ 知，直线l_1的斜率为 3，在 y 轴上的截距为-1；由直线l_2：$y=2x+5$ 知，直线l_2的斜率为 2，在 y 轴上的截距为 5。

因为 $k_1 \neq k_2$，所以直线l_1与l_2相交。

(2) 由 $x-y+3=0$ 得 $y=x+3$，

故直线l_1的斜率为 1，在 y 轴上的截距为 3。

由直线l_2：$y=x+2$ 知，直线l_2的斜率为 1，在 y 轴上的截距为 2。

因为 $k_1=k_2$，$b_1 \neq \mathrm{b}_2$, 所以直线l_1与l_2平行。

例 2．求过点(2, 3)，且平行于直线 $x+\frac{1}{2}y-1=0$ 的直线方程。

解：把直线 $x+\frac{1}{2}y-1=0$ 化为斜截式，得 $y=-2x-2$，则它的斜率是-2。

因为所求直线平行于直线 $x+\dfrac{1}{2}y-1=0$，所以它的斜率也是-2。

根据直线方程的点斜式，所求直线方程为 $y-3=-2(x-3)$。

即 $2x+y-7=0$

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．直线$2x+2y-1=0$与$x-2y-1=0$的交点是(　　)

A．($-\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{3}$)　B．($-\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{1}{6}$)　C．($\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{6}$)　D．($\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{1}{6}$)

2．若直线 $y= k_1\mathrm{x}+b_1$ 与直线 $y= k_1\mathrm{x}+b_1$ 重合，则(　　)。

A．$k_1 \neq k_2$且$b_1 \neq b_2$　B．$k_1 \neq k_2$　C．$k_1=k_2$且$b_1=b_2$　D．$k_1=k_2$且$b_1 \neq b_2$

3．已知直线l_1：$y=2x-1$ 与直线l_1：$ax-y+3=0$，若l_1平行于l_2，则 a 的值为(　　)。

A．1　B．2　C．-2　D．-1

二、填空题

1．直线$x-2y-1=0$与直线$3x-2y-1=0$的交点是________________________。

2．直线$y=2x+3$与$x-6=0$的位置关系是________________________。

3．如直线l与$y=\sqrt{2}\,x+1$平行，则直线l的斜率为________________。

三、解答题

1．求出各组直线的交点：

(1) l_1：$2y=3x-1$，l_2：$y=x-3$；　　(2) l_1：$y-3x=-1$，l_2：$y+2x+5=0$。

2．判断下列各组直线的位置关系(相交、平行或重合)：

(1) l_1：$x-1=0$，l_2：$y=x+5$；　　(2) l_1：$x-y+3=0$，l_2：$y=2x+1$。

能力提升

1．已知直线l与$y=\sqrt{3}\,x+1$平行，求直线l的倾斜角。

2．已知$P(1,-1)$是直线l上一点，直线l与直线$x+2y-1=0$平行，求直线l的方程。

拓展训练

设直线l平行于直线$3x-y+1=0$，并且经过直线$x+1=0$与$2x+3y+1=0$的交点，求直线l方程。

8.3.2　两条直线相交

【知识回顾】

1．两条直线____叫做这两条直线的夹角，两条直线平行或重合时夹角____________，两条直线夹角的取值范围为______________________。

2．两直线垂直的条件：

(1) 如果直线l_1与直线l_2的斜率都存在且不等于0，那么斜率相乘等于__________；

(2) 斜率不存在的直线与斜率为0的直线__________(相交、平行、垂直)。

【典例分析】

例1．判断直线$y=-2x+3$与直线$-x-2y+2=0$是否互相垂直。

解：设直线$y=-2x+3$的斜率为k_1，则$k_1=2$。

设直线$-x-2y+2=0$的斜率为k_2，由$-x-2y+2=0$得$Y=-\dfrac{1}{2}x+1$，故$K_2=-\dfrac{1}{2}$。

由于$k_1 * K_2=-1$，所以直线$y=-2x+3$与直线$-x-2y+2=0$互相垂直。

例2．已知直线l经过点$A(1，-2)$，且垂直于直线$3x+y+2=0$，求直线l的方程。

解：设直线$3x+y+2=0$的斜率为k_1，把直线$3x+y+2=0$化为斜截式得$y=-3x-2$，则$k_1=-3$。

设直线l的斜率为k，由于$l_1\perp l_2$，故$l\ \ k_{lx}\ k=-1$，即$-3k=-1$，由此得$k=\dfrac{1}{3}$。

又由直线方程的点斜式，求得直线方程为$y-(-2)=-\dfrac{1}{3}(x-1)$，即x+3y+4=0。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列各对直线，互相垂直的是(　　)。

A．$x=1$与$x=y$　　　　B．$2x+y+1=0$与$y=\frac{1}{2}x+1$

C．$x+y+2=0$与$2x+y=1=0$　　　　D．$3x+5=0$与$-x+3=0$

2．直线 $ax+3y-1=0$ 与直线 $x-y+3=0$ 垂直，则 $a=$(　　)。

A．3　　B．-3　　C．-1　　D．1。

3．已知直线 $x-y-1=0$ 与直线$-x-y+3=0$ 垂直，则垂足坐标为(　　)。

A．(3,2)　　B．(-2，-3)　　C．(2,1)　　D．(-3,2)

二、填空题

1．过点(0，-1)，且垂直于直线$x+2y-1=0$ 的直线方程为____________________。

2．直线 $y=3x+3$ 与$-\dfrac{1}{3}x-y=0$ 的位置关系是______________________。

3．如直线l与 $y=\sqrt{3}x+1$ 垂直，则直线l的斜率为_______________。

三、解答题

1．判断下列各对直线是否相互垂直

(1) l_1：$y=-2x-1$，l_2：$y=\dfrac{1}{2}x-3$；　(2) l_1：$7y-5x=-1$，l_2：$y+2x+5=0$。

2．求过原点且垂直于直线 $x-y+2=0$ 的直线方程。

能力提升

1．求过点(2,8)且与直线 $x+y-1=0$ 垂直的直线方程。

2．过点 $A(-1，-2)$，$B(2,\mathrm{b})$的直线与直线 $x-2y=0$ 垂直，求 b 的值。

拓展训练

已知等腰直角三角形的两个顶点是 $A(3,0)$，$B(0,4)$，求直角顶点 C 的坐标。

8.3.3　点到直线的距离

【知识回顾】

点 $P(x_0,y_0)$到直线$lAx+By+C=0$ 的距离 $d=$__________。

【典例分析】

基础闯关

一、选择题

1．点(0,5)到直线 $y=2x$ 的距离为(　　)。

A．5　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

2．原点到直线 $y=x-1$ 的距离为(　　)。

A．1　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

3．点(2,3)到直线 $x-2y-1=0$ 的距离为(　　)。

A．$\sqrt{5}$　　B．$\frac{5}{2}$　　C．5　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

二、填空题

1．若点(0，b)到直线 $x-y=0$ 的距离等于 $\sqrt{2}$ 则 b=________________。

2．到 y 轴的距离等于 2 的 x 轴上的点的坐标是____________________。

3．直线 $x=2$ 与 $x-3=0$ 的距离是________________。

三、解答题

1．求点 $P(1,2)$到直线 $2x+4y+2=0$ 的距离。

2．求两条平行直线 $2x+y-3=0$ 和 $2x+y-6=0$ 之间的距离。

能力提升

1．求两条平行直线 $y=2x+6$ 和 $y=2x-4$ 之间的距离。

2．设在 x 轴上的点 P，到直线 $2x-y+4=0$ 的距离等于 4，求点 P 的坐标。

拓展训练

求过点 $M(-2，1)$且与 $A(-1，2)$，$B(3，0)$两点距离相等的直线的方程。

8.4　圆

8.4.1　圆的标准方程

【知识回顾】

1．圆是________________________________，定点叫做____________，定长叫做_________。

2．圆的标准方程为____________________________，当圆心为坐标原点 $O(0,0)$时，半径为 r 的圆的标准方程为____________________。

【典例分析】

例 1．求以点 $C(-3,0)$为圆心，半径为 $r=1$ 的圆的标准方程。

解：因为 $a=-3,b=0,r=1$，故所求圆的标准方程为

$(x+3)^2+y^2=1$

例 2．已知圆心在点 $c(-1,2)$，并且这个圆过点 $A(3，-1)$，求圆 C 的标准方程。

解：设所求圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

其中 $a=-1$，$b=2$，根据两点距离公式，得：

$r=\sqrt{[3-(-1)]^2+[(-1)-2]^2}=5$

将 $a=-1$，$b=2$，$r=5$ 代入方程，得：

$(x+1)^2+(y-2)^2=25$

这就是所求圆 C 的标准方程。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．圆$(x+1)^2+y^2=1$ 的圆心坐标为(　　)。

A．(1,0)　　B．(−1,0)　　C．(0,0)　　D．(0，−1)

2．圆 $x^2+y^2+2x+4y=0$ 的半径为(　　)。

A．1　　B．5　　C．$\sqrt{5}$　　D．25

二、填空题

1．圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心坐标是__________，半径是________。

2．圆$(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 的圆心坐标是__________，半径是________。

三、解答题

1．求出圆心在点 $C(0,2)$，半径 $r=2$ 的标准方程，并画出图形。

2．已知圆$(x-1)^2+y^2=6$,求圆心的坐标和半径，并画出图形。

能力提升

1．求圆心是点 $C(1,2)$，并且过点 $P(-1,0)$的圆的标准方程。

2．求以$(-1,2)$为圆心，半径为$\sqrt{10}$ 的圆与 y 轴交点的坐标。

拓展训练

已知 $A(1,3)$，$B(5,1)$，求以线段 AB 为直径的圆的标准方程。

8.4.2　圆的一般方程

【知识回顾】

圆的一般方程为________________，其中圆心坐标是__________，半径是__________。

【典例分析】

例．将圆的方程 $x^2+y^2+8x-6y=0$ 化为标准方程,并求出圆心的坐标和半径。

解：将原方程左边配方，得：

$x^2+8x+4^2-4^2+y^2-6y+3^2-3^2=0$

即　$(x+4)^2+(y-3)^2=5^2$

所以方程表示的是圆心为$(-4,3)$，半径为 5 的一个圆。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．圆 $x^2+y^{2+}+x+1=0$ 的圆心坐标为(　　)。

A．(1,0)　　B．(−1,0)　　C．(0,0)　　D．(0，−1)

2．圆 $x^2+y^2+2x+6y=0$ 的半径为(　　)。

A．1　　B．5　　C．$\sqrt{13}$　　D．25

二、填空题

1．圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$(其中 $D^2+E^2-4F>0$)的圆心坐标是______，半径是_______。

2．圆的一般方程 $x^2+y^2-2x+8y=0$，化为标准方程为________________________。

三、解答题

1．已知圆 $x^2+y^2+4y=0$,求圆心的坐标和半径。

2．已知圆 $x^2+y^2-6x=0$,求圆心的坐标和半径。

能力提升

1．已知圆 C_1：$(x-1)^2+y^2=1$，圆 C_2：$x^2+y^2+2x=1$。求两圆的圆心距。

2．求圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心到直线 $2x+3y-1=0$ 的距离。

拓展训练

已知圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey-4=0$ 的圆心坐标为（2,1），求圆的半径。

8.4.3　确定圆的条件

【知识回顾】

1．圆的标准方程为____________,求圆的标准方程时，关键是确定__________的值。

2．圆的一般方程为____________,求圆的一般方程时，关键是确定__________的值。

【典例分析】

例 1．经过点 $M(1,0)$，$N(-2,1)$，并且圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆的方程。

解：由于与圆心在直线 $2x-y=0$ 上，所以设圆心位点 $O(x_0,2x_0)$，于是有x_0

$|OM|=|ON|$

即 $\sqrt{(x_0-1)^2+(2x_0)^2}=\sqrt{[x_0-(-2)]^2+(2x_0-1)^2}$

解得$x_0=-2$。

因此，圆心为$(-2,-4)$，半径为 $r=\sqrt{[1-(-2)]^2+[0-(-4)]^2}=5$ 。

故所求圆的方程为$(x+2)^2+(y+4)^2=25$。

例 2．求过点 $A(-2,4)$,$B(-1,3)$,$C(2,6)$的圆的方程。

解：设圆的一般方程为

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

因为 $A(-2,4)$,$B(-1,3)$,$C(2,6)$三点都在圆上，所以它们的坐标都是方程的解，将它们的坐标依次代入上面的方程，得到关于 A、B、C 的三元一次方程组

$$\begin{cases} -2D+4E+F=-20 \\ -D+3E+F=-10 \\ 2D+6E+F=40 \end{cases}$$

解这个方程组，得 $D=0$，$E=-10$，$F=20$，

所求圆的方程为 $x^2+y^2-10y+20=0$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．以$(0,0)$为圆心，半径为 2 的圆的方程为(　　)。

A．$x^2+y^2=2$　　B．$x^2+y^2=4$　　C．$(x-2)^2+(y-2)^2=1$　　D．$(x+2)^2+(y+2)^2=1$

2．以$(-1,0)$为圆心，半径为$\sqrt{3}$的圆的方程为(　　)。

A．$x^2+y^2+2x-y-3=0$　　B．$x^2+y^2+2x-y-\sqrt{3}=5$

C．$x^2+y^2+2x-2=0$　　D．$x^2+y^2+2x+\sqrt{3}=0$

二、填空题

1．圆心为坐标原点，半径为5 的圆的方程为____________________。

2．圆$(x-2)^2+y^2=a$经过点$(1,1)$，则圆的半径为____________。

三、解答题

1．已知点$(a+1, a)$在圆 $x^2+y^2=5$ 上，求a的值。

2．求过点 $A(4,3)$,$B(1,0)$,$C(5,2)$的圆的方程。

能力提升

若方程 $x^2+y^2-4x+2y=k^2-14k-5$ 表示一个圆，求实数 k 的取值范围。

拓展训练

求过直线 $x-2y+1=0$ 和直线 $2x+2y-1=0$ 的交点，圆心是$(-1,1)$的圆的方程。

8.4.4　直线与圆的位置关系

【知识回顾】

1．平面内直线与圆的位置关系有三种，分别是____________、____________、____________。

2. 利用圆心到直线的距离与半径大小的关系判断直线与圆的位置关系的方法是______，

若 $d< r$,则直线与圆________________,若 $d= r$,则直线与圆________________,若 $d> r$,则直线与圆________________。

【典例分析】

例 1．判断直线 $x+2y-1=0$ 与圆$(x-1)^2+(y+1)^2=4$ 的位置关系。

解：由圆的方程$(x-1)^2+(y+1)^2=4$ 知，圆的半径 $r=2$，圆心坐标为(1，−1)。圆心 C 到直线 $x+2y-1=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$。

由于 $d<r$，故直线与圆相交。

例 2．求以点 $C(2,-1)$为圆心且与直线 $x+y+1=0$ 相切的圆的方程。

解：圆心 $C(-2,1)$到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，恰好等于圆的半径，故 $r=\sqrt{2}$，由圆的标准方程得$(x+1)^2+(y11)^2=2$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．直线 $x-y=0$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系为(　　)。

A．相切　　　　B．相交　　　　C．相离

2．半径为 2，且与 x 轴相切于原点的圆的方程为(　　)。

A．$(x-2)^2+y^2=4$　　　　B．$x^2+(y-2)^2=4$

C．$x^2+(y+2)^2=4$　　　　D．$xx^2+(y-2)^2=4$或$x^2+(y+2)^2=4$

二、填空题

1．直线与圆相切，则圆心到直线的距离等于__________________。

2．直线与圆最多有多少个公共点_______________个。

三、解答题

1．判断直线 $2x+3y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系。

2．求以点 $C(1,-1)$为圆心且与直线 $2x+y+2=0$ 相切的圆的方程。

能力提升

1．若直线 $3x+2y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切，求 a 的值。

2．当 b 为何值时，直线 $x+y+b=0$ 与圆$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 相切。

拓展训练

圆与直线 $x-y-1=0$ 相切，圆心在点(2，−1)上，求这个圆的方程。

8.4.5　直线方程与圆的方程应用举例

【知识回顾】

1．直线的一般式方程___________，点斜式方程______________，斜截式方程_________________。

2．圆的标准方程______________________________，圆的一般方程____________________________。

【典例分析】

例 1．光线从点 $A(-1,2)$射到点 $B(2,0)$，然后被 x 轴反射，求点 A 的反射对应点坐标。

解：点 $B(2,0)$在 x 轴上，是反射点。设点 $A(-1,2)$被 x 轴反射的对应点为 A' $(x，2)$，链接 AA'，直线 AA 与直线 $y=2$ 垂直平分线。$C(2,2)$为线段 AA' 的中点。由两点坐标公式 $2=\dfrac{-1+x}{2}$，则 $x=5$，故点 A 的反射对应点坐标为(5，2)。

例 2．小明不小心打破了一面圆形镜子，镜子剩下如图 2-22 所示的一部分，小明想去玻璃店重新做一面镜子，现量得 AB=12cm，CD=2cm，点 C 为 AB 的中点，求表示圆形镜子的圆的方程。

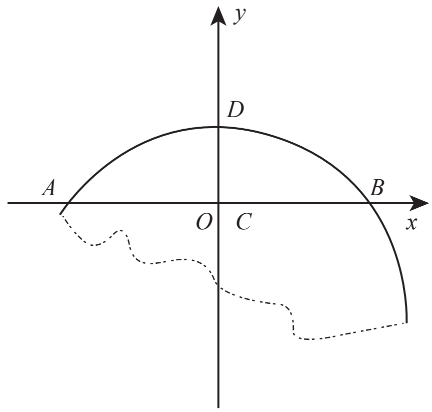


图 2-22

解：以 AB 直线为 x 轴，以 CD 直线为 y 轴，点 C 为原点建立直角坐标系，$A(-6,0)$，$B(6,0)$D(0,2)，设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

因为 $A(-6,0)$，$B(6,0)$，$D(0,2)$三点都在圆上，所以它们的坐标都是方程的解。将它们的坐标依次代入上面的方程，得到关于 A、B、C 的三元一次方程组：

$$\begin{cases} -6D+F=-36 \\ 6D+F=-36 \\ 2E+F=-4 \end{cases}$$

解这个方程组，得 $D=0$，$E=16$，$F=-36$，故表示圆形镜子的圆的方程 $x^2+y^2+16y-36=0$。

【能力检测】

基础闯关

选择题

1．直线 $x-y+1=0$ 与直线 $2x+y+2=0$ 的交点为(　　)。

A．(0,3)　　B．(−3,0)　　C．(1,3)　　D．(−3,1)

2．直线 $x-y=0$ 截圆 $x^2+y^2=1$ 的弦长为(　　)。

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．1

3．由镜面反射原理，入射光线的方程是(　　)。

A．$x=y$　　B．$y=-x$　　C．$y=-\sqrt{2}x$　　D．$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

能力提升

某拱桥横断面尺寸如图 2-23 所示，有一艘货船，船宽 12 米，船与货共高 5 米，请问货船是否能安全通过拱桥？

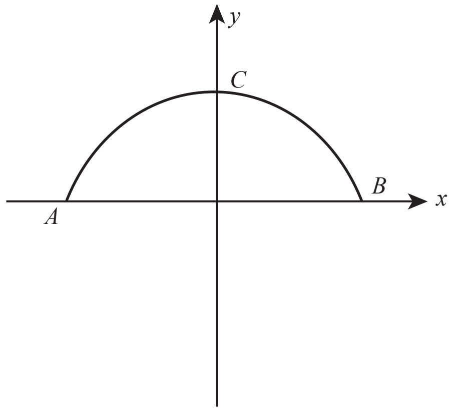


图 2-23

测试题

一、单选题（共40分）

1．若坐标轴上 P（3），Q（x）两点间的距离为 5，则 x=(　　)。

A．5　　B．−2　　C．7　　D．8

2．点 O 为坐标原点，点 P 为直线 $x+y-4=0$ 上的点，则$|OP|$的最小值是（　　）。

A．$\sqrt{10}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．2

3．设 A（−1，3），B（1，5），则直线 AB 的倾斜角为（　　）。

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

4．已知 A（2，−3），B（0，5），则直线 AB 的斜率是（　　）。

A．4　　B．−4　　C．3　　D．−3

5．直线 $3x-y-5=0$ 和 $x+2y-4=0$ 的交点坐标是(　　)。

A．(1，2)　　B．(2，1)　　C．(−1，2)　　D．(2，−1)

6．若直线 $2ax+5y+1=0$ 与直线 $x+2y+3=0$ 互相垂直，则 a 等于（　　）。

A．−8　　B．−6　　C．−5　　D．5

7．直线 $2x-y+p=0(p\in R)$和直线 $4x-2y+1=0$ 的位置关系是(　　)。

A．平行　　B．垂直　　C．平行或重合　　D．不平行又不重合

8．以 $A(1，2)$，$B(1，6)$为直径两端点的圆的方程是（　　）。

A．$(x+1)^2+(y-4)^2=8$　　B．$(x-1)^2+(y-4)^2=4$

C．$(x-1)^2+(y-2)^2=4$　　D．$(x+1)^2+(y-4)^2=16$

9．过点 $A(-1，2)$，且倾斜角是 60　的直线方程为（　　）。

A．$\sqrt{3}x+y-2-\sqrt{3}=0$　　B．$\sqrt{3}x-y+2+\sqrt{3}=0$

C．$x-y+3=0$　　D．$x+y+3=0$

10．方程为 $x^2+y^2-2x+6y-6=0$ 的圆的圆心坐标是(　　)。

A．(1，3)　　B．(−1，3)　　C．(1，−3)　　D．(2，1)

二、填空题（共18分）

1．两直线 $x+2y+3=0$，$2x-y+1=0$ 的位置关系是______________。

2．点(4，5)到直线 $3x-4y-2=0$ 的距离为___________________。

3．平行于直线 $x+3y+1=0$，且过点(1，2)的直线方程为____________________。

4．直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$ 和直线 $2x-y=10$ 相交于一点，则 a 的值为__________。

5．直线 $2x+3y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系是______________。

6．若方程 $x^2+y^2-3x+4y+k=0$ 表示一个圆，则 k 的取值范围是________________。

三、解答题（共42分）

1．求经过点 A（−1，3），B（0，2）的直线方程。

2．求点 $P(0,2)$到直线 $3x+4y+2=0$ 的距离。

3．已知两直线l_1：$x+a^2y+6=0$，l_2：$(a-2)x+3ay+2a=0$，问a取何值时，l_1与l_2：（1）平行；（2）重合。

第 9 章　立体几何

9.1　平面的基本性质

9.1.1　平面

【知识回顾】

1．平面的三个特征：______________、________________、_________________。

几何里的平面是从现实生活中抽象出来的，它和直线一样，是无限延展的，常见的桌面、黑板面、平静的水面都是平面的局部形象。

2．平面的表示法：____。如图 2-24 所示，记作平面 α、平面 β 。也可以用平行四边形的四个顶点的字母或两个相对顶点的字母来命名，如图 2-24(a)中的平面 也可以记作平面 $ABCD$，平面 AC 或平面 BD。

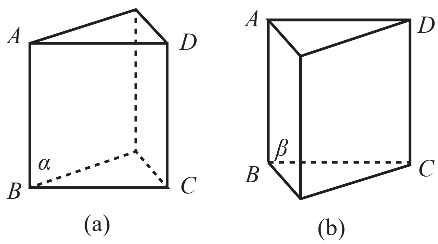


图 2-24

【典例分析】

例 1．观察下面图形，说明它们的摆放位置有什么不同。

解：我们看到了这个几何体的前后两个面。

例 2．正方体的三个面所在平面 A_1C_1, A_1B, B_1C ，如 2-25 所示。分别记作 α,β,γ ，试用适当的符号填空。

(1)A_1 ________ α，B_1 ________ α

(2)B_1 ________ γ，C_1 ________ γ

(3)C_1 ________ β　D_1 ________ β

(4)α ________ $\beta = A_1B_1$　β ________ $\gamma = BB_1$

(5)A_1B_1 _________ α, BB_1 _________ β　A_1B_1 _________ γ

解：(1) $\in$，$\in$；(2) $\in$，$\in$；(3) $\in$，$\notin$；(4) $\cap$，$\cap$；(5) $\subsetneqq$，$\subsetneqq$，$\not\subset$ 。

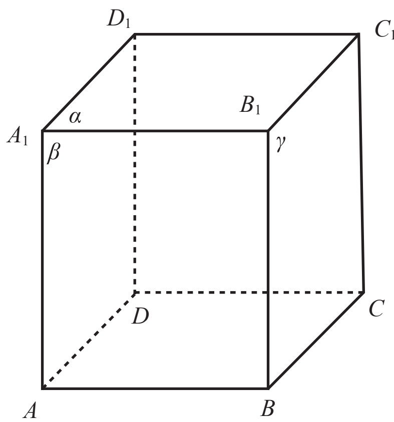


图 2-25

【能力检测】

基础闯关

判断下列命题是否正确：

① 一个平面长 4m，宽 2m，厚 0.01mm(　　　)。

② 平面是平行四边形(　　　)。

9.1.2　平面的基本性质

【知识回顾】

平面的基本性质

公理 1．____。

公理 2．____。

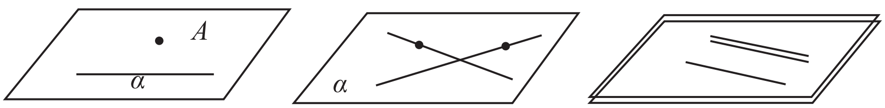
公理 3．____。

根据上述公理，可以得出下面的三个结论。

推论 1．_________________________________如图 2-26(a)所示。

推论 2．_________________________________如图 2-26(b)所示。

推论 3．_________________________________如图 2-26(c)所示。



(a)　　　(b)　　　(c)

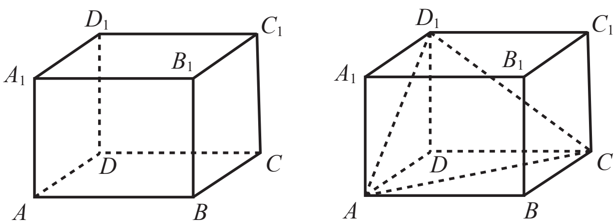
图 2-26

【典例分析】

例．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ [如图 2-27(a)]中，画出由 A、C、D_1 三点所确定的平面 γ 与长方体的表面的交线。

分析：画两个相交平面的交线，关键是找出这两个平面的两个公共点。

解：点 A、D_1 为平面 γ 与平面 ADD_1A_1 的公共点，点 A、C 为平面 γ 与平面 $ABCD$ 的公共点，点 C、D_1 为平面 γ 与平面 CC_1D_1D 的公共点，分别将这三个点两两连接，得到直线 AD_1、AC、CD_1 就是为由 A、C、D_1 三点所确定的平面 γ 与长方体的表面的交线，如图 2-27(b)所示。



(a)　　　(b)

图 2-27

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．(　　) 点确定一个平面。

A．三个点　　B．不在一条直线上的三

C．空间二个点.　　D．在一条直线上的三个点

2．如果一条直线上至少(　　)在同一平面内，则这条直线在该平面内。

A．一个点　　B．二个点　　C．三个点　　D．四个点

3．两个平面相交有(　)。

A．一条公共直线　B．一个公共点　C．二个公共点　D．一条公共线段

4．两条(　)直线确定一个平面。

A．相交　　B．平行　　C．相交或平行　　D．重合

二、填空题

1．直线 L 上有 A、B 两点在平面 a 内，则直线 L________________。

2．有一个公共点的两个________平面有一条公共直线。

3．(1) A、B、C 三点不在同一条直线上，则这三点确定了_________。

(2) 两条直线 $a//b$，则 A、b 确定了____________。

(3) 两条直线 a 与 b 相交于点 A，则 A、b 确定了_____________ 。

三、解答题

1．“平面 α 与平面 β 只有一个公共点”的说法正确吗？

2．梯形是平面图形吗？为什么？

3．已知 A、B、C 是直线 l 上的三个点，D 不是直线 l 上的点．判断直线 AD、BD、CD 是否在同一个平面内。

能力提升

一、选择题

1．经过同一直线上的三点能确定(　　)平面。

A．0个　　B．1个　　C．3个　　D．无数个

2．三条直线两两平行，但不共面，确定(　　)平面。

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．无数个

3．空间四个点，其中任何三点都不在一条直线上，过其中任意三点作一平面，共可作(　　)平面。

A．0个　　B．3个　　C．4个　　D．无数个

4．交于一点的三条直线，其中两条相交直线可以确定一个平面，最多可确定(　)平面。

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．无数个

5．四条线段首尾衔接，其中两条相交直线可以确定一个平面，最多可确定(　)平面。

A．2个　　B．3个　　C．4个　　D．5个

二、填空题

1．用“真”“假”填空。

(1) 空间三个点确定个点确定一个平面是______命题。

(2) 一条直线和一个点确定一个平面是______命题。

(3) 两个平面相交，只有一个公共点是______命题。

(4) 三条直线交于一点，这三条直线一定共面是_____命题。

2．用“平面”“空间”填空：梯形一定是_______图形。

三、解答题

1．根据公理与推论解释以下情形的原因。

(1) 两个合页和一把锁就固定了一个门，为什么？

(2) 有脚撑的自行车会稳定，为什么？

2．证明梯形的四条边共面。

拓展训练

一、选择题

1．下面给出四个命题：① 一个平面长 4m，宽 2m；② 2 个平面重叠在一起比一个平面厚；③ 一个平面的面积是 $25\mathrm{m}^2$；④ 一条直线的长度比一个平面的长度大，其中正确命题的个数是(　　)。

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

2．空间不共线的四点，可以确定平面的个数为(　　)。

A．0　　B．1　　C．1或4　　D．无法确定

3．下列说法正确的是　(　　)。

① 一条直线上有一个点在平面内，则这条直线上所有的点在这平面内；②一条直线上有两点在一个平面内，则这条直线在这个平面内；　③若线段 AB 在平面内，则线段 AB 延长线上的任何一点一点必在平面内；　④一条射线上有两点在一个平面内，则这条射线上所有的点都在这个平面内。

A．①②③　　B．②③④　　C．③④　　D．②③

9.2　直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的判定及性质

9.2.1　直线与直线平行

【知识回顾】

1．直线与直线的位置关系

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{相交直线}\\\text{平行直线}\end{array}\right\}\text{共面}\\\text{异面直线：不同在任何一个平面内的两条直线}\end{cases}$$

2．直线与直线平行的判定与性质

公理 4 平行于同一直线的两直线互相平行。

集合语言：$l_1 /\!/ l_2, l_2 /\!/ l_3 \Rightarrow l_1 /\!/ l_3$

3．空间四边形：不在同一平面上的四条线段首尾相接，并且最后一条的尾端与最初一条的首端重合，这样的图形叫做空间四边形。

(1) 顺次连结空间四边形各边中点得到的图形是平行四边形。

(2) 空间四边形的各边不同在一个平面内。

(3) 空间四边形两条对角线所在直线为异面直线；若四边相等，则对角线不相交但

垂直。

(4) 四边相等的四边形不一定是菱形。

(5) 空间四边形的内角和小于 360°。

【典例分析】

例．不在同一平面上的四条线段首尾相接，并且最后一条的尾端与最初一条的首端重合，这样的图形叫空间四边形。 顺次连接空间四边形 $ABCD$ 各边中点 E、F、G、H，求证四边形 $EFGH$ 是平行四边形还是梯形？

E、F、G、H 不是中点，$EFGH$ 能否为平行四边形？

若 $AC=BD$, $AC\perp BD$ 。四边形 $EFGH$ 是什么图形？

【能力检测】

基础闯关

一、填空题

1．如图 2-28 所示，填空并在括号中填理由：

(1) 由$\angle ABD=\angle CDB$ 得____∥_____(内错角相等的，两直线平行)；

(2) 由$\angle CAD=\angle ACB$ 得____∥______(内错角相等的，两直线平行)；

(3) 由$\angle CBA+\angle BAD=180°$ 得 <u>AD</u>∥_<u>BC</u>_(同旁内角互补，两直线平行)

2．如图 2-29，尽可能多地写出直线 $l_1\parallel l_2$ 的条件：__________________________。

3．如图 2-30，尽可能地写出能判定 $AB\parallel CD$ 的条件来：________________________。

4．若果两直线 a,b无公共点，则两直线的位置关系是________________________。

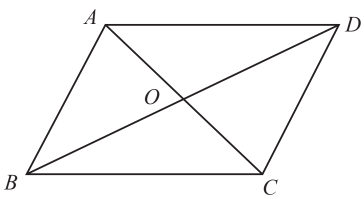


图 2-28

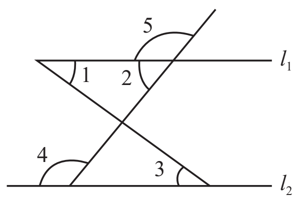


图 2-29

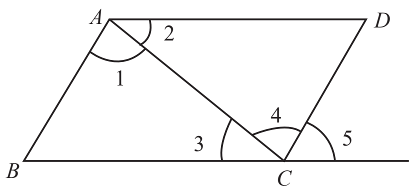


图 2-30

二、选择题

1．异面直线是指(　　)。

A．空间中两条不相交的直线　　B．分别位于两个不同平面内的两条直线

C．平面内的一条直线与平面外的一条直线 D．不同在任何一个平面内的两条直线

2．已知 a,b 是异面直线，直线 $c\parallel$ 直线 a,那么 c 与 b (　　)。

A．一定是异面直线　　　　　B．一定是相交直线

C．不可能是平行直线　　　　D．不可能是相交直线

3．空间四边形的对角线互相垂直且相等，顺次连接这个四边形各边中点，所组成的四边形是(　　)。

A．梯形　B．矩形 C．平行四边形　 D．正方形

三、解答题

如图 2-31 所示，$\angle D=\angle A$，$\angle B=\angle FCB$，求证：$ED//CF$。

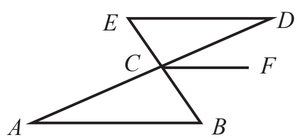


图 2-31

能力提升

一、填空题

1．如图 2-32 所示，$AB/\!/CD$，$EG\perp AB$ 于 G，$\angle 1=50^\circ$，则 $\angle E=$________。

2．如图 2-33 所示，$AB/\!/CD$，$AC\perp BC$，图中与 $\angle CAB$ 互余的角有____________。

3．如图 2-34 所示，直线 $l_1/\!/\ l_2$，$AB\perp l_1$ 于 O，BC 与 l_2 交于 E，$\angle 1=$___，则 $\angle 2=$___。

4．如图 2-35 所示，$AB/\!/EF/\!/CD$，$EG/\!/BD$，则图中与 $\angle 1$ 相等的角(不包括 $\angle 1$)共有________个。

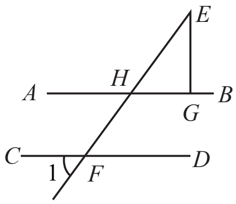


图 2-32

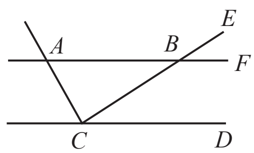


图 2-33

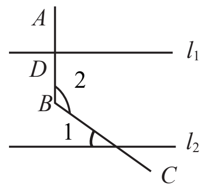


图 2-34

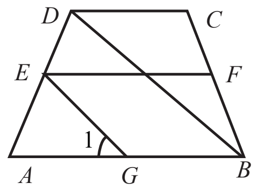


图 2-35

二、解答题

如图 2-36 所示，已知 E,F,G,H 分别是空间四边形 $ABCD$ 四条边 AB,BC,CD,DA 的中点。

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

(2) 若 $AC\perp BD$, 求证：四边形 $EFGH$ 为矩形。

(3) 若 $BD=2$，$AC=6$，求EG^2+HF^2的值 。

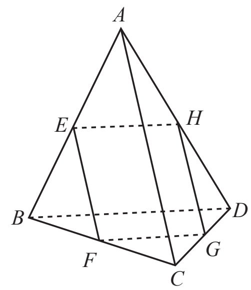


图 2-36

拓展训练

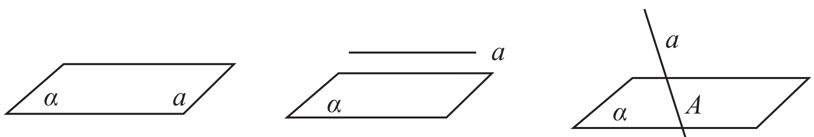
已知 E,E_1 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AD,A_1D_1 的中点。

求证：$\angle BEC=\angle B_1E_1C_1$

9.2.2　直线与平面的平行判定与性质

【知识回顾】

1．直线与平面的位置关系，如图 2-37 所示。



(a)　(b)　(c)

图 2-37

(1) 直线在平面内，______________________________如图 2-37(a)所示，$a\subset\alpha$。

(2) 直线和平面平行，____________________________如图 2-37(b)所示，$a/\!/\alpha$。

(3) 直线与平面相交，___________________________如图 2-37(c)所示，$a\cap\alpha=A$。

2．直线与平面平行的判定和性质，如图 2-38 所示。

(1) 判定：①如果一条直线和一个平面内的__________________________________，

那么这条直线和这个平面垂直。②两条平行线中有______________________________，那么另一条直线也和这个平面垂直。

(2) 性质：①______________________________，那么这条直线和这个平面内所有直线都垂直。②______________________________，那么这两条直线平行。

性质Ⅰ：垂直于同一个平面的两条直线平行。

性质Ⅱ：垂直于同一直线的两平面平行。

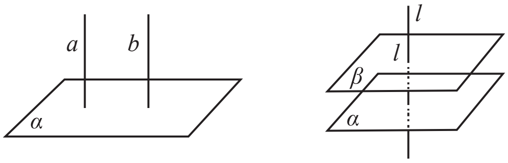


图 2-38

$\left.\begin{matrix} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/ b$　　　　$\left.\begin{matrix} \alpha\perp l \\ \beta\perp l \end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha/\!/ \beta$

【典例分析】

例 1．三条直线两两相交，由这三条直线所确定平面的个数是(　　　)。

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．1或3

分析　本题显然是要应用推论 2 判断所能确定平面的个数，需要在空间想象出这三条直线所有不同位置的图形，有如图 2-39 所示的三种情况：

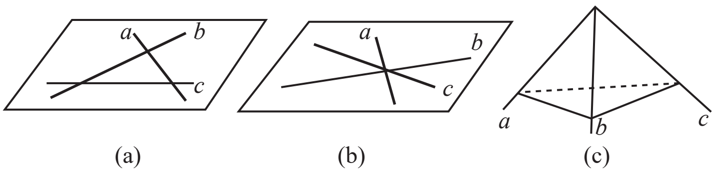


图 2-39

答案：D。

点评：本题启发我们考虑问题不要只局限于平面图形，应养成在三维空间考虑问题的习惯。

例 2．(1) 不共面的四点可以确定几个平面？

(2) 三条直线两两平行但不共面，它们可以确定几个平面？

(3) 共点的三条直线可以确定几个平面？

分析：(1) 可利用公理 3 判定。

(2) 可利用公式 3 的推论 3 判定。

(3) 需进行分类讨论判定。

解：(1) 不共面的四点可以确定 4 个平面。

(2) 三条直线两两平行但不共面，它们可以确定 3 个平面。

(3) 共点的三条直线可以确定 1 个或 3 个平面。

点评：判定平面的个数问题关键是要紧紧地抓住已知条件，要做到不重不漏。

平面的确定问题主要是根据已知条件和公里3及其3个推论来判定平面的个数。

例 3．将下面用符号语言表示的关系改用文字语言予以叙述，并用图形语言予以表示。$\alpha\cap\beta=l, A\in l, AB\subset\alpha, AC\subset\beta$。

分析：本题实质是数学三种语言——符号语言、文字语言、图形语言的互译。

解：文字语言叙述为：点 A 在平面 α 与平面 β 的交线 l 上，AB 、AC 分别在 α 、β 内。图形语言表示如图 2-40 所示。

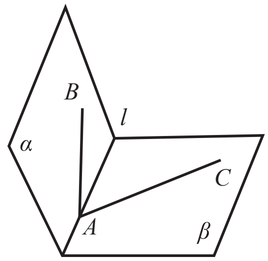


图 2-40

点评　文字语言比较自然、生动，它能将问题所研究的对象的含义更加明白地叙述出来，我们教科书上的概念、定理等多以文字语言叙述为主。

【能力测验】

基础闯关

一、选择题

1．设有平面 α、β 和直线 m、n，则 $m /\!/ \alpha$ 的一个充分条件是(　　)。

A．$\alpha\perp\beta$且$m\perp\beta$　　B．$\alpha\cap\beta=n$且$m /\!/ n$

C．$m /\!/ n$且$n /\!/ \alpha$　　D．$\alpha /\!/ \beta$且$m \subsetneqq \beta$

2．设 m、n 是两条不同的直线，α、β、γ 是三个不同的平面，给出下列 4 个命题，其中正确命题的序号是(　　)。

① 若 $m\perp\alpha$，$n /\!/ \alpha$，则 $m\perp n$　② 若 $\alpha /\!/ \beta$，$\beta /\!/ \gamma$，$m\perp\alpha$，则 $m\perp\gamma$　③ 若 $m /\!/ \alpha$，$n /\!/ \alpha$，则 $m /\!/ n$　④ 若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha /\!/ \beta$。

A．②　　B．②③　　C．③④　　D．①④

3．一条直线若同时平行于两个相交平面，那么这条直线与这两个平面的交线的位置关系是(　　)。

A．异面　　B．相交　　C．平行　　D．不能确定

4．对于任意的直线 l 与平同 a，在平面 a 内必有直线 m，使 m 与 l（　　)。

A．平行　　B．相交　　C．垂直　　D．互为异面直线

二、解答题

已知：如图 2-41 所示空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点。求证：$EF /\!/$ 平面 BCD。

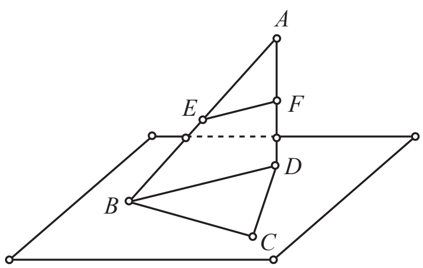


图 2-41

拓展训练

1．能保证直线 a 与平面 α 平行的条件是(　　)。

A．$a\not\subset\alpha, b\subset\alpha, a/\!/b$　　B．$b\subset\alpha, a/\!/b$

C．$b\subset\alpha, c/\!/\alpha, a/\!/b, a/\!/c$　　D．$b\subset\alpha, A\in a, B\in a, C\in b, D\in b$ 且 $AC=BD$

2．下列命题正确的是(　)。

A．平行于同一平面的两条直线平行

B．若直线 $a/\!/\alpha$,则平面 α 内有且仅有一条直线与 a 平行

C．若直线 $a/\!/\alpha$,则平面 α 内任一条直线都与 a 平行

D．若直线 $a/\!/\alpha$,则平面 α 内有无数条直线与 a 平行

E．如果 A、b 是两条直线，且 $a/\!/b$，那么 a 平行于经过 b 的任何平面

F．如果直线 A、b 和平面 α 满足 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha, b\not\subset\alpha$，那么 $b/\!/\alpha$

9.2.3　平面与平面平行

【知识回顾】

1．两个平面的位置关系：

(1) 两平面平行____________________，若 α 与 β 平行，记作 $\alpha/\!/\beta$。

(2) 两平面相交____________________，若 α 与 β 有交线 a，记作 $\alpha\cap\beta=a$。

2．两个平面平行的判定：

两个面平行的判定定理：____________________，那么这两个平面平行。

$a\subset\beta, b\subset\beta, a\cap b=A, a/\!/\alpha, b/\!/\alpha\Rightarrow\alpha/\!/\beta$。

3．两个平面平行的性质：

(1) 两个平面平行，______________________________。

(2) 两个平面平行的性质定理：______________________________。

$\alpha/\!/\beta$，$\gamma\cap\alpha=a$，$\gamma\cap\beta=b\Rightarrow a/\!/b$。

【方法提炼】

1．注意：画两个互相平行的平面时，表示平面的两个平行四边形的对应边应画平行。

2．垂直于同一直线的两个平面平行，也可以用来作面面平行的判定。

即 $\alpha\perp AA'$，$\beta\perp AA'$　$\alpha/\!/\beta$。

【典例分析】

例 1．设直线 l、m，平面 α、β，下列条件能得出 $\alpha/\!/\beta$ 的是(　　)。

A．$l\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，且 $l/\!/\beta$，$m/\!/\beta$　　B．$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，且 $l/\!/m$

C．$l\perp\alpha$，$m\perp\beta$，且 $l/\!/m$　　D．$l/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，且 $l/\!/m$

分析：选项 A 是错误的，因为当 $l/\!/m$ 时，α 与 β 可能相交，选项 B 是错误的，理由同 A。选项 C 是正确的，因为 $l\perp\alpha$，$m/\!/l$，所以 $m\perp\alpha$，又∵ $m\perp\beta$，∴ $\alpha/\!/\beta$。选项 D 也是错误的，满足条件的 α 可能与 β 相交。

答案：C

点评　此题极易选 A，原因是对平面平行的判定定理掌握不准确所致．本例这样的选择题是常见题目，要正确得出选择，需要有较好的作图能力和对定理、公理的准确掌握、深刻理解，同时要考虑到各种情况。

例 2.设平面α内的两条相交直线 m，n 分别平行于另一个平面β内的两条直线 k_1，l 如图 2-42 所示。试判断平面α，β是否平行？

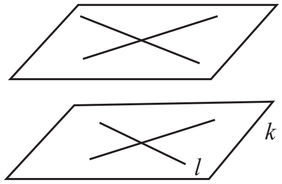


图 2-42

解：因为 m 在β外、l 在β内，且 $m // l$，所以

直线 $m //$ 平面β。

同理可得直线 $n //$ 平面β。

于 m、n 是平面α内两条相交直线，故可以判断$\alpha // \beta$。

【能力检测】

基础闯关

1．平面 $\alpha //$ 平面β的一个充分条件是__________(填序号)。

① 存在一条直线a，$a // \alpha$，$a // \beta$；

② 存在一条直线a，$a \subset \alpha$，$a // \beta$；

③ 存在两条平行直线a、b，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$a // \beta$，$b // \alpha$;

④ 存在两条异面直线a、b，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$a // \beta$，$b // \alpha$。

2．已知 $a // \alpha$，$b // \alpha$，则直线 a，b 的位置关系：

① 平行；② 垂直不相交；③ 垂直相交；④ 相交；⑤ 不垂直且不相交。

其中可能成立的有__________。

3．以下命题：

① 若$a // b$，$b \subset \alpha$，则$a // \alpha$；　② 若$a //$平面α，$b \subset \alpha$，则$a // b$；

③ 若$a // b$，$a //$平面α，则$b // \alpha$;　④ 若$a //$平面α，$b //$平面α，则$a // b$。

其中真命题是________。

4．下列命题中，正确命题的是________(填序号)。

① 若直线l上有无数个点不在平面α内，则$l // \alpha$；

② 若直线l与平面α平行，则l与平面α内的任意一条直线都平行；

③ 如果两条平行直线中的一条直线与一个平面平行，那么另一条直线也与这个平面平行；

④ 若直线l与平面α平行，则l与平面α内的任意一条直线都没有公共点。

5．对于平面α和共面的直线 m、n，下列命题中假命题是_________(填序号)。

① 若$m \perp \alpha$，$m \perp n$，则$n // \alpha$；

② 若$m // \alpha$，$n // \alpha$，则$m // n$;

③ 若$m \subset \alpha$，$n // \alpha$，则$m // n$;

④ 若m、n与α所成的角相等，则$m // n$。

6．已知直线 $a,b,$平面α，则以下三个命题：

① 若$a // b, b \subset \alpha$，则$a // \alpha$；

② 若$a // b, a // \alpha$，则$b // \alpha$；

③ 若$a /\!/ \alpha$，$b /\!/ \alpha$，则$a /\!/ b$。

其中真命题的个数是________。

能力提升

1．下列条件中，能判断两个平面平行的是(　　　)。

A．一个平面内的一条直线平行于另一个平面

B．一个平面内的两条直线平行于另一个平面

C．一个平面内有无数条直线平行于另一个平面

D．一个平面内的任何一条直线都平行于另一个平面

2．如果平面α内的两条相交直线与平面β所成的角相等，那么这两个平面的位置关系是________________。

拓展训练

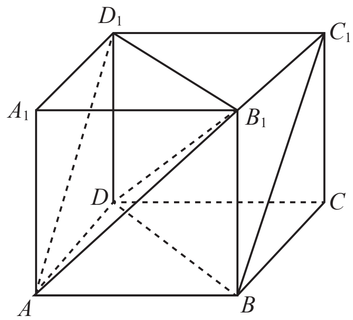


图 2-43

如图 2-43 所示，已知正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$。求证：平面$AB_1D_1 /\!/$ 平面C_1BD。

9.3　直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角

9.3.1　空间两条直线所成的角

【知识回顾】

1．异面直线所成角的定义：________________叫做异面直线a,b所成的角。

2．异面直线所成的角的画法：

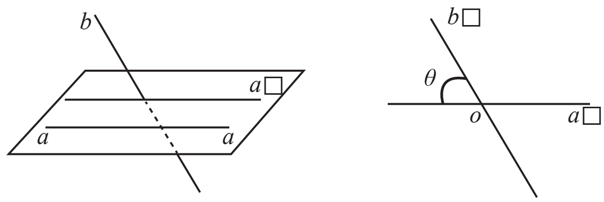


图 2-44

如所示，已知两异面直线a，b，空间任取一点O，经过点O作直线$a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$，把a'与b'，所成的锐角或直角叫做异面直线a与b所成的角(或称夹角)。

特殊情形下，若两异面直线成直角，则称两异面直线互相垂直，记作$a \perp b$。

【典例分析】

例 1．若$a /\!/ b$，$b \cap c=A$，则a，c的位置关系是(　　)。

A．异面直线　　　　B．相交直线

C．平行直线　　　　D．相交直线或异面直线

分析：判断两条直线的位置关系，可以通过观察满足已知条件的模型或图形而得出正确结论。

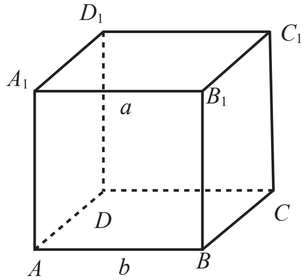


图 2-45

解：如图 2-45 所示，在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，设$A_1B_1=a$，$AB=b$，则$a /\!/ b$。

若设$BB_1=c$，则a与c相交。若设$BC=c$，则a与c异面。

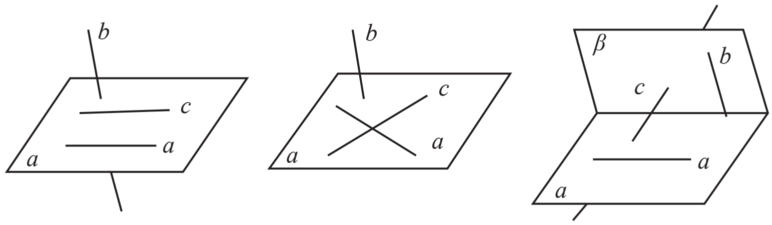
故选 D。

点评　利用具体模型或图形解决问题的方法既直观又易于理解，一般以正方体、四面体等为具体模型。例如，a，b 相交，b，c 相交，则 a，c 的位置关系是相交、平行或异面。类似地；a，b 异面，b，c 异面，则 a，c 的位置关系是平行、相交或异面。这些都可以用正方体模型来判断。

例 2．a、b、c 是三条直线，若 a 与 b 异面，b 与 c 异面，判断 a 与 c 的位置关系，并画图说明。

分析：这是一道考查异面直线概念及空间直线位置关系的问题，同时也考查了图形语言的表达能力。

解：直线 a 与 c 的位置关系有以下三种情形如图 2-46 所示。



(a)　　(b)　　(c)

图 2-46

∴直线 a 与 c 的位置关系可能平行，如图 2-46（a）；可能相交，如图 2-46（b）；可能异面，如图 2-46（c）。

点评　本题也考查了空间想象能力和逻辑划分、分类讨论的能力。

例 3．如果两条异面直线称作“一对”，那么在正方体的十二条棱中，共有几对异面直线(　　　　)。

A．12对　　B．24对　　C．36对　　D．48对

分析：一般地，立体几何中的计数问题，是由所数的量的性质，确定一规律，然后按此规律进行计数。正方体的各棱具有相同的位置关系，所以以一条棱为基量，考察与其异面的几对，问题可解。

解：如图 2-47 所示，正方体中与 AB 异面的直线有 C_1C、D_1D、B_1C_1、A_1D_1。

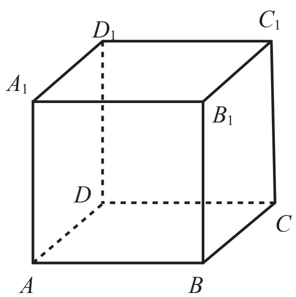


图 2-47

∵ 各棱具有相同的位置关系，且正方体有 12 条棱，排除两棱的重复计算成本，

∴ 异面直线共有 $\dfrac{12\times 4}{2}=24$ 对。

点评　分析清楚几何体特点是避免重复计数的关键．计数问题必须避免盲目乱数，做到“不重不漏”。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．空间两条直线的位置关系有(　　)种。

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．两条异面直线所成角的范围是(　　)；

A．$\left(0^\circ,90^\circ\right)$　　B．$\left(0^\circ,90^\circ\right]$　　C．$\left[0^\circ,90^\circ\right]$　　D．$\left(0^\circ,180^\circ\right)$

3．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1B 与 C_1C 所成的角的大小是(　)。

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

二、填空题

1．空间两条没有公共点的直线的位置关系是__________。

2．两条异面直线 a,b 所成的角是 60°，直线 c 平行于直线 a，则 b、c 所成角的大小是__________。

3．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 AB 与 B_1C_1 所成角的大小是________。

三、解答题

在如图 2-48 所示的正方体中，求下列各对直线所成角的度数：

(1) DD_1 与 BC；

(2) AA_1 与 BC_1。

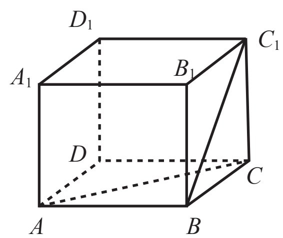


图 2-48

能力提升

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 点分别是 BB_1、CC_1 的中点。

(1) 试画出异面直线 AE、BF 所成的角。　(2)求异面直线 BC_1 和 AC 所成的角。

9.3.2　直线与平面所成的角

【知识回顾】

1．直线与平面所成的角的定义：______________________________。

平面的一条斜线和它在这个平面内的______________，叫这条斜线和平面所成的锐角，

如果这________________，直线和平面所成角是直角，如果____________________，直线和平面所成的角就是零度。

2．直线和平面所成的角的范围是 __________________。

【典例分析】

例 1．在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，试求直线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值如图 2-49 所示。

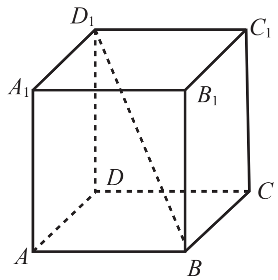


图 2-49

解：由正方体的性质可知，$DD_1 \perp$ 平面$ABCD$，

所以 BD_1 在平面 $ABCD$ 内的射影为 BD。

由直线和平面所成角的定义，

则 $\angle D_1BD$ 为 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角

在 $Rt\Delta D_1BD$ 中，$\tan D_1BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

强调：(1) 求直线和平面所成的角的步骤是先作再证后求。

(2) 求直线和平面所成的角的关键是作(找)斜线在平面内的射影。

例 2．在如图 2-50 所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，BC_1 与平面 BDD_1B_1 所成的角为(　　)。

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

解：连接 A_1C_1，交 B_1D_1 于 O，连接 BO，得到$\angle OBC_1$ 是 BC_1 与平面 BDD_1B_1 所成的角，然后再在三角形 OBC_1 中求出此角即可。如图 2-51 所示。

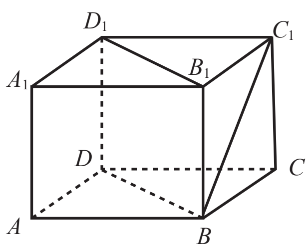


图 2-50

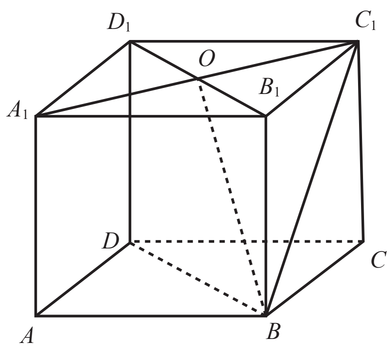


图 2-51

【能力检测】

基础闯关

1. 若直线 l 上有两点 P、Q 到平面 α 的距离相等，则直线 l 与平面 α 的位置关系是(　　)。

A．平行　　B．相交　　C．平行或相交　　D．平行、相交或在平面α内

2．已知a，b，c是直线，α，β是平面，下列条件中，能得出直线$a\perp$平面α的是(　　)。

A．$a\perp c, a\perp b$，其中$b\subset\alpha, c\subset\alpha$　　B．$a\perp b, b//\alpha$

C．$\alpha\perp\beta$，$a//\beta$　　D．$a//b, b\perp\alpha$

3．如果直线$l\perp$平面α，①若直线$m\perp l$,则$m//\alpha$；②若$m\perp\alpha$,则$m//l$；③若$m//\alpha$,则$m\perp l$；④若$m//l$,则$m\perp\alpha$,上述判断正确的是(　　)。

A．①②③　B．②③④　C．①③④　　D．②④

4．线段AB的长等于它在平面α内射影长的2倍，则AB所在直线与平面α所成的角为(　　)。

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．120°

5．给出下列命题：

① 若平面α的两条斜线段PA、PB在α内的射影长相等，那么PA、PB的长度相等；② 已知PO是平面α的斜线段，AO是PO在平面α内的射影，若$OQ\perp OP$，则必有$OQ\perp OA$；③与两条异面直线都平行的平面有且只有一个；④平面α内有两条直线a、b都与另一个平面β平行，则$\alpha//\beta$,

上述命题中不正确的命题是(　　)。

A．①②③④　B．①②③　C．①③④　　D．②③④

6．下列命题正确的是(　　)。

A．一条直线与一个平面平行，它就和这个平面内的任意一条直线平行

B．平行于同一个平面的两条直线平行

C．与两个相交平面的交线平行的直线，必平行于这两个平面

D．平面外的两条平行直线中的一条与一个平面平行，则另一条直线也与此平面平行

7．下列命题正确的是（　）

A．$\left.\begin{array}{l}a//b\\a\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow b//\alpha$　B．$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\b\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow b//a$　C．$\left.\begin{array}{l}a\perp b\\a\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow b//\alpha$　D．$\left.\begin{array}{l}a//\alpha\\a\perp b\end{array}\right\}\Rightarrow b//\alpha$

能力提升

在如图2-52所示的正方体中：

(1)求BD_1和底面$ABCD$所成角的正切值；

(2)求BD_1和面AA_1D_1D所成角的正切值。

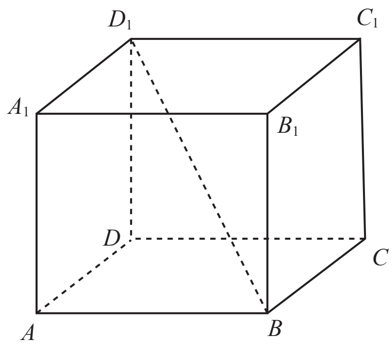


图2-52

拓展训练

在如图2-53所示的空间四边形$PBCA$中，$AC\perp BC$，$PA=4$

(1)求PB与平面PAC所成角的正切值；

(2)求PC和平面PAB所成角的正切值。

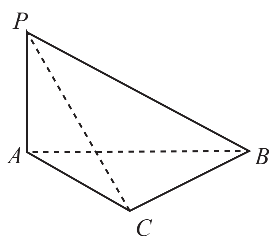


图2-53

9.3.3 平面与平面所成的角

【知识回顾】

1．____，每一部分叫做一个半平面。

2．____，这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面．以直线 l(或 CD)为棱，两个半平面分别为α、β 的二面角，记作二面角$\alpha-l-\beta$(或$\alpha-CD-\beta$)。如图 2-54 所示。

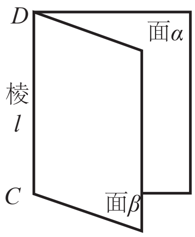


图 2-54

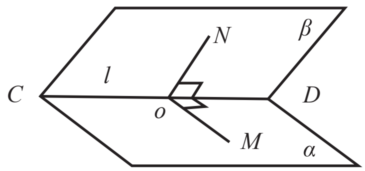


图 2-55

过棱上的一点，分别在二面角的两个面内作与棱垂直的射线，以这两条射线为边的________________，叫做二面角的平面角．如图 2-55 所示，在二面角$\alpha-l-\beta$的棱l上任意选取一点O，以点O为垂足，在面α与面β内分别作$OM\perp l$、$ON\perp l$，则____________是这个二面角的平面角。

3．直二面角：____________________________________,叫做直二面角。

【典例分析】

例. 如图 2-56 所示，河堤斜面与水平面所成的二面角为 60°，堤面上有一条直道 CD，它和堤脚的水平线 AB 的夹角是 30°，沿这条直道从堤脚向上行走到 10m 米时人升高了多少米？

解：设水平面是α，

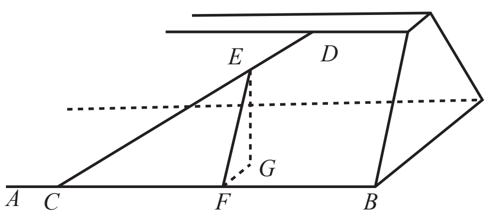


图 2-56

作 $EG\perp\alpha$ 于 G，作 $GF\perp AB$ 于 F，连接 EF，

∵ FG 是斜线 FE 在水平面内的射影，$GF\perp AB$，

∴ $FE\perp AB$ (三垂线定理)。

∴ $\angle EFG$ 就是河堤斜面与水平面所成的二面角的平面角。

∴ $EG=EF\sin 60^\circ=CE\sin 30^\circ\sin 60^\circ=2.5\sqrt{3}\approx 4.3(\mathrm{m})$。

答：沿直道行走 10m 时人升高约 4.3m。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．一个二面角的两个面分别垂直于另一个二面角的两个面，则这两个二面角(　　)。

A．相等　　B．互补　　C．相等或互补　　D．不能确定

2．在三棱锥 $A—BCD$ 中，若 $AD\perp BC$，$BD\perp AD$，ΔBCD 是锐角三角形，那么必有(　　)。

A．平面$ABD\perp$平面ADC　　B．平面$ABD\perp$平面ABC

C．平面$ADC\perp$平面BCD　　D．平面$ABC\perp$平面BCD

3．PA 垂直于以 AB 为直径的圆所在的平面，C 为圆上异于 $A.B$ 的任一点，则下列关系不正确的是(　　)。

A．$PA\perp BC$　　B．$AC\perp PB$　　C．$PC\perp BC$　　D．$BC\perp$平面PAC

4．在边长为 a 的正三角形 ABC 中，$AD\perp BC$ 于 D，沿 AD 折成二面角 $B—AD—C$ 后，$BC=\dfrac{1}{2}a$，且二面角 $B—AD—C$ 的大小为(　　)。

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

二、解答题

如图 2-57 所示，α、β、γ 为平面，$\alpha\cap\beta=l,\alpha\cap\gamma=AO,\beta\cap\gamma=BO,\ l\perp\gamma$，指出图中哪个角是二面角的平面角，并说明理由。

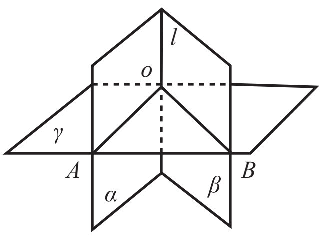


图 2-57

能力提升

1．如图 2-58 所示，立体图形 $V—ABC$ 的四个侧面是全等的正三角形，画出二面角 $V—AB—C$ 的平面角，并求它的度数。

2．如图 2-59 所示，立体图形 $V—ABCD$ 中，底面是正方形 $ABCD$，其他四个侧面都是全等的正三角形，画出二面角 $V—AB—C$ 的平面角，并求它的度数。

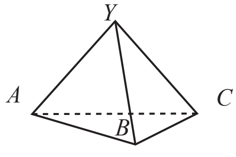


图 2-58

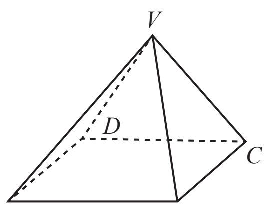


图 2-59

拓展训练

1．如图 2-60 所示，已知 P 是二面角 $\alpha-AB-\beta$ 棱上一点，过 P 分别在 α、β 内引射线 PM、PN，且 $\angle MPN=60°$，$\angle BPM=\angle BPN=45°$，求此二面角的度数。

提示：在 PB 上取不同于 P 的一点 O，在 α 内过 O 作 $OC\perp AB$ 交 PM 于 C，

在 β 内作 $OD\perp AB$ 交 PN 于 D，连结 CD，可得：

$\angle COD$ 是二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的平面角。

2．如图 2-61 所示，在三棱锥 S—ABC 中，$SA\perp$ 平面 ABC，平面 $SAB\perp$ 平面 SBC。

(1) 求证：$AB\perp BC$；

(2) 若设二面角 S—BC—A 为 45°，$SA=BC$，求二面角 A—SC—B 的大小。

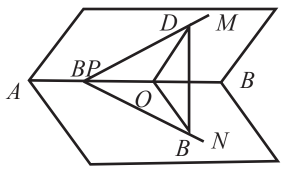


图 2-60

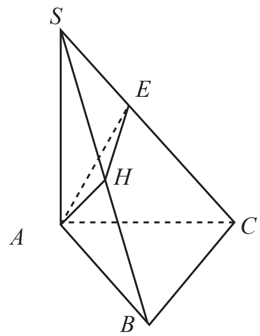


图 2-61

9.4 直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定及性质

9.4.1 空间两条直线垂直的判定及性质

【知识回顾】

定理：____________________________，那么这两条直线互相垂直。

【典例分析】

例 1．给出下列 4 个命题：

① 若直线 l 与平面 α 内无数条直线垂直，则直线 $l\perp$ 平面 α；

② 平面 α 与 β 分别过两条互相垂直的直线，则 $\alpha\perp\beta$；

③ 若直线 $l\perp$ 平面 α，则存在 $a\subset\alpha$，使 $l//a$；

④ 若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的两条相交直线，则 $\alpha\perp\beta$。

其中正确命题的个数为(　　)。

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

[答案]　A

点评：当 l 与平面 α 内的无数条平行直线垂直时，l 不一定与 α 垂直，①错误；

当平面 α 与 β 分别过两条互相垂直的直线时，α，β 可能垂直，也可能不垂直，②错误；根据直线与平面垂直的定义，知直线 $l\perp$ 平面 α 时，l 与 α 内的所有直线都垂直，不可能存在直线与 l 平行的情况，③错误；根据线面垂直的判定定理知④正确。选 A。

例 2．直线 a 和平面 α 内两条直线 B．c 都垂直，给出下列说法，正确的说法是(　　)。

① $a/\!/\alpha$ 可能成立；② $a\perp\alpha$；③ 平面 α 可能经过 a；④ a 有可能与平面 α 相交。

A．①②③④　　B．③④　　C．①②④　　D．①③④

[答案]　D

点评：如图 2-62 所示，$a/\!/\alpha$，$b\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，$a\perp b$，$a\perp c$，故①正确，②不正确，故选 D。

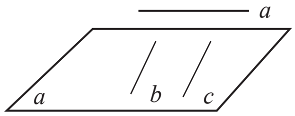


图 2-62

【能力检测】

基础闯关

1．判断下列各题：

(1) $a/\!/b$　$c\perp a$ => $c\perp b$　(　　)。

(2) $a\perp c$　$b\perp c$ => $a\perp b$　(　　)。

2．填空题

(1) 空间两条直线互相垂直，则这两条直线的位置关系是 __________________。

(2) 空间中垂直于同一条直线的两条直线 __________________。

(3) 给出下列三个命题：

①“直线 $a.b$ 为异面直线”的充分非必要条件是“直线 $a.b$ 不相交”；

②“直线 a 垂直于直线 b”的充分非必要条件是“直线 a 垂直直线 b 在平面 β 内的射影”；

③“直线 a 垂直平面 β” 的必要非充分条件是“直线 a 垂直于平面 β 内的无数条直线”

其中所有真命题的序号是________________。

(4) 给出下列四个命题：

①经过平面外一点有且仅有一个平面与已知平面垂直；

②如果一条直线和两个垂直平面中的一个垂直，它必和另一个平行；

③过不在平面内的一条直线可作无数个平面与已知平面垂直；

④如果两个平面互相垂直，经过一个平面内一点与另一个平面垂直的直线在这个平面内。其中正确的是__________。

3．教室内有一把尺子，无论怎样放置，地面上总有这样的直线与该直尺所在直线(　　)。

A平行　　B垂直　　C相交但不垂直　　D异面

能力提升

1．命题：

① 分别和两条异面直线 AB．CD 同时相交的两条直线 AC．BD 一定是异面直线；

② 同时与两条异面直线垂直的两直线不一定平行；

③ 斜线 b 在面 α 内的射影为 c，直线 $a\perp c$，则 $a\perp b$；

④ 有三个角为直角的四边形是矩形，其中真命题是______________。

2．已知，⊂、⊂为不垂直的异面直线，⊂是一个平面，则⊂、⊂在⊂上的射影有可能是

① 两条平行直线；　　② 两条互相垂直的直线；

③ 一条直线；　　④ 一条直线及其外一点；

在上面结论中，正确结论的编号为______________(写出所有正确结论的编号)。

9.4.2　直线与平面垂直的判定及性质

【知识回顾】

1．线面垂直的定义：__________________________________，则称直线l与平面α垂直，记作$l\perp\alpha$。

其中，直线l称为平面α的垂线，平面α称为直线l的垂面，直线l与平面α的交点称为垂足。

重要结论：____

____。

2．直线与平面垂直的判定定理：

(1) 如果一条直线和一个平面内的_________________________都垂直，那么这条直线垂直于这个平面，简记为_________________________。

(2) 重要结论：如果两条平行直线中_________________________，则另一条也垂直于该平面。

3．直线与平面垂直的性质定理：

(1) 如果一条直线和一个平面垂直，那么_________________________简记为"_________________________"。

(2) 如果_________________________，那么这两条直线平行。

【典例分析】

例．如图 2-63 所示，$A\perp$⊙O所在的平面，AB是⊙O的直径，C是⊙O上任意一点，过A点作$AE\perp PC$于点E，求证：$AE\perp$平面PBC

证明：∵$PA\perp$平面ABC，∴$PA\perp BC$

又∵AB是⊙O的直径，∴$BC\perp AC$

而$PC\cap AC=C$，∴$BC\perp$平面PAC

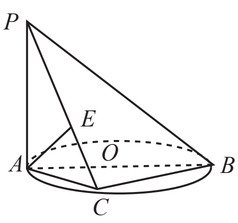


图 2-63

又∵AE在平面PAC内，∴$BC\perp AE$

∵$PC\perp AE$，且$PC\cap BC=C$，

∴$AE\perp$平面PBC

点评：证明直线与平面垂直的常用方法有利用线面垂直的定义；利用线面垂直的判定定理；利用"若直线a//直线b，直线$a\perp$平面α，则直线$b\perp$平面α"

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．“直线 l 垂直于平面α内的无数条直线”是“$l\perp\alpha$”的（　　）。

A．充分条件　B．必要条件 C．充要条件 D．既不是充分条件也不是必要条件

2．如果一条直线 l 与平面α的一条垂线垂直，那么直线 l 与平面α的位置关系是(　　)。

A．$l\subset\alpha$　　B．$l\perp\alpha$　　C．$l\ //\alpha$　　D．$l\subset\alpha$或 $l//\alpha$

3．若两直线 $a\perp b$，且 $a\perp$平面α，则 b 与α的位置关系是(　　)

A．相交　　B．$b//\alpha$　　C．$b\subset\alpha$　　D．$b//\alpha$，或$b\subset\alpha$

4．$a//\alpha$，则 a 平行于 α 内的(　　)。

A．一条确定的直线　B．任意一条直线　C．所有直线　D．无数多条平行线

5．如果直线 $a//$平面 α，那么直线 a 与平面 α 内的（　　）。

A．一条直线不相交　　B．两条直线不相交

C．无数条直线不相交　　D 任意一条直线都不相交

6．若直线 l 上有两点 P、Q 到平面 α 的距离相等，则直线 ll 与平面 α 的位置关系是(　　)。

A．平行　　B．相交

C．平行或相交　　D．平行、相交或在平面 α 内

二、填空题

1．过直线外一点作直线的垂线有_____条；垂面有_____个；平行线有______；平行平面有________个。

2．过平面外一点作该平面的垂线有________条；垂面有_______个；平行线有______条；平行平面有_____个。

3．过一点可作_______个平面与已知平面垂直。

4．过平面 α 的一条斜线可作________个平面与平面 α 垂直。

5．过平面 α 的一条平行线可作__________平面与平面 α 垂直。

能力提升

1．若直线 a 与平面 α 不垂直，那么在平面 α 内与直线 a 垂直的直线有_______条。

2．如图 2-64 所示，$PA\perp$平面 ABC，ΔABC　中，$BC\perp AC$，则图中直角三角形的个数为________________。

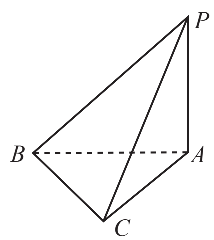


图 2-64

3．m、n 是空间两条不同直线，α、β 是两个不同平面，下面有 4 个命题：

① $m\perp\alpha$，$n//\beta$，$\alpha//\beta\Rightarrow m\perp n$；
② $m\perp n$，$\alpha//\beta$，$m\perp\alpha\Rightarrow n//\beta$；
③ $m\perp n$，$\alpha//\beta$，$m//\alpha\Rightarrow n\perp\beta$；
④ $m\perp\alpha$，$m//n$，$\alpha//\beta\Rightarrow n\perp\beta$。

其中，所有真命题的编号是__________。

4．设 α、β、γ 为平面，a，b 为直线，给出下列条件：

① $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a//\beta$，$b//\alpha$；　　② $\alpha//\gamma$，$\beta//\gamma$；
③ $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$；　　④ $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，$a//b$。

其中能使 $\alpha//\beta$ 成立的条件是(　　)。

A．①②　　B．②③　　C．②④　　D．③④

拓展训练

图 2-65 中，有一根旗杆高 AB，它的顶端挂一条长的绳子，拉紧绳子并把它的下端放在地面上的 C、D 两点(和旗杆脚不在同一直线上)，试向这两点都和旗杆脚间的距离是多大时，旗杆就和地面垂直，为什么？

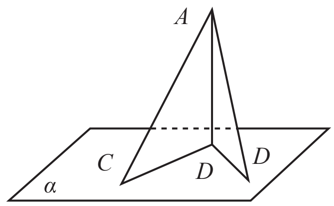


图 2-65

9.4.3　平面与平面垂直的判定与性质

【知识回顾】

1．两个平面垂直的定义：____。

作用：① 用于证明两个平面垂直，证明二面角的平面角是直角。

② 平面垂直，二面角为直二面角，平面角的二直线互相垂直。

2．两个平面垂直的判定定理：____，那么这两个平面互相垂直。

两个平面垂直的判定定理不仅是判定两个平面互相垂直的依据，而且是找出垂直于一个平面的另一个平面的依据。由判定定理的内容可证________________________________。

3．两个平面垂直性质定理：

如果两个平面垂直，那么一个平面内的垂直于它们的交线的直线垂直于另一个平面。简言为__________________________。

【典例分析】

例 1．如果一个二面角的两个半平面分别平行于另一个二面角的两个半平面，则这两个二面角的关系是(　　)。

A．相等　　B．互补　　C．相等或互补　　D．不能确定

解：选 C。当这两个二面角的两个面均同向或均异向时，它们相等；当这两个二面角的两个面中，一组同向，另一组异向时，它们互补。

例 2．在图 2-66 所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知 $PA\perp$底面 $ABCD$，且底面 $ABCD$ 为矩形，则下列结论中错误的是（　　）。

A．平面PAB⊥平面PAD　　B．平面PAB⊥平面PBC

C．平面PBC⊥平面PCD　　D．平面PCD⊥平面PAD

解：选 C。由面面垂直的判定定理知：平面 $PAB\perp$平面 PAD，平面 $PAB\perp$平面 PBC，平面 $PCD\perp$平面 PAD，A．B．D 正确。

例 3．如果直线 l、m 与平面 α、β、γ 之间满足：$l=\beta\cap\gamma$，$l//\alpha$，$m\subset\alpha$ 和 $m\perp\gamma$，那么(　　)。

A．$\alpha\perp\gamma$且$l\perp m$　　B．$\alpha\perp\gamma$且$m//\beta$

C．$m//\beta$且$l\perp m$　　D．$\alpha//\beta$且$\alpha\perp\gamma$

解：选 A。如图 2-67 所示，平面 α 为平面 AD_1，平面 β 为平面 BC_1，平面 γ 为平面 AC。

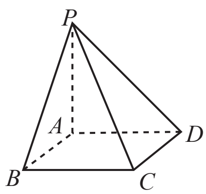


图 2-66

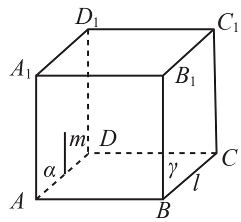


图 2-67

$\because m\subset\alpha$，$m\perp\gamma$，由面面垂直的判定定理得 $\alpha\perp\gamma$，又 $m\perp\gamma$，$l\subset\gamma$，由线面垂直的性质得 $m\perp l$。

例 4．在正四面体 $P-ABC$ 中，D．E、F 分别是 AB．BC．CA 的中点，则下面四个结论中不成立的是(　　)。

A．$BC//$平面PDF;　　B．$DF\perp$平面PAE

C．平面$PDF\perp$平面ABC;　　D．平面$PAE\perp$平面ABC

解：选 C。可画出对应图形(图略)。

则 $BC//DF$，又 $DF\subset$平面 PDF，$BC\not\subset$平面 PDF，

$\therefore BC//$平面 PDF，故 A 成立；

由 $AE\perp BC$，$BC//DF$，知 $DF\perp AE$，$DF\perp PE$，

$\therefore DF\perp$平面 PAE，故 B 成立。

又 $DF\subset$平面 ABC，

$\therefore$平面 $ABC\perp$平面 PAE，故 D 成立。

【能力检测】

基础闯关

1．若平面 $\alpha\perp$平面 β，平面 $\beta\perp$平面 γ，则(　　)。

A．$\alpha//\gamma$　　B．$\alpha\perp\gamma$

C．α与γ相交但不垂直　　D．以上都有可能

2．已知直线 $A.b$ 和平面 α、β、γ，可以使 $\alpha//\beta$ 的条件是(　　)。

A．$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a//b$　　B．$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a//\beta$，$b//\beta$

C．$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$　　D．$a\perp\alpha$，$a\perp\beta$

3．已知平面 $\alpha\perp$平面 β，直线 $a\subset\alpha$，a 与 β 不垂直。则(　　)。

A．a垂直于α与β的交线　　B．a不垂直于α与β的交线

C．a可能垂直于α与β的交线也可能不垂直于α与β的交线　　D．以上都不对

4．如果直线 l,m 与平面α，β，γ满足：$\beta\cap\gamma=l,l//\alpha,m\subset\alpha$ 且 $m\perp\gamma$，那么必有(　　)。

A．$\alpha\perp\gamma$且$l\perp m$　B．$\alpha//\beta$且$\alpha\perp\gamma$　C．$\alpha\perp\gamma$且$m//\beta$　D．$m//\beta$且$l//m$

5．已知a,b为两条不同的直线，α，β为两个不同的平面，且$a\perp\alpha,b\perp\beta$，则下列命题中的假命题是(　　)。

A．若$a//b$，则$\alpha//\beta$　　B．若$\alpha\perp\beta$，则$a\perp b$

C．若a,b相交，则α,β相交　　D．若α,β相交，则a,b相交

能力提升

选择题

1．给定下列四个命题：

① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；

② 一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直；

③ 直于同一直线的两条直线相互平行；

④ 两个平面垂直，那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直。

其中，为真命题的是(　　)。

A．①和②　　B．②和③　　C．②和④　　D．③和④

2．用a,b,c表示三条不同的直线，γ表示平面，给出下列命题：

① 若$a//b,b//c$，则$a//c$　② 若$a\perp b,b\perp c$，则$a\perp c$

③ $a//\gamma,b//\gamma$，则$a//b$　④ 若$a\perp\gamma,b\perp\gamma$，则$a//b$

其中真命题的序号是(　　)。

A．①②　　B．②③　　C．①④　　D．③④

3．设a,b为两条直线，α，β为两个平面，则下列结论成立的是(　　)。

A．若$a\subset\alpha,b\subset\beta$，且$a//b$，则$\alpha//\beta$　　B．若$a\subset\alpha,b\subset\beta$，且$a\perp b$，则$\alpha\perp\beta$

C．若$a//\alpha,b\subset\alpha$，则$a//b$　　D．若$a\perp\alpha,b\perp\alpha$，则$a//b$

4．下面四个命题：

①“直线$a//$直线b”的充要条件是“a平行于b所在的平面”；

② 直线$l\perp$平面α内所有直线”的充要条件是“$l\perp$平面α”；

③ 直线a,b为异面直线”的充分不必要条件是“直线a,b不相交”；

平面$\alpha//$平面β的必要不充分条件是“α内存在不共线三点到β的距离相等”。

④ 其中正确命题的序号是(　　)。

A．①②　　B．②③　　C．②④　　D．③④

拓展训练

1．经过平面α外一点和平面α内一点与平面α垂直的平面有________个。

解析：设面外的点为A，面内的点为B，过点A作面α的垂线l，若点B恰为垂足，则所有过AB的平面均与α 垂直，此时有无数个平面与α垂直；若点B不是垂足，则l与点B确定唯一平面β满足$\alpha\perp\beta$。

2．图2-68中的点P是$ABCD$所在平面外一点，且$PA=PC$，求证：平面$PAC\perp$平面PBD。

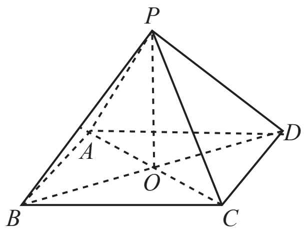


图 2-68

9.5　柱、锥、球及其简单组合体

9.5.1　棱柱与棱锥

【知识回顾】

1. 棱柱的概念及其性质：____________叫做棱柱。____________叫做棱柱的底面，其余各面叫做棱柱的侧面，____________________叫做棱柱的侧棱。____________________的距离，叫做棱柱的高。

表示棱柱时，通常分别顺次写出两个底面各个顶点的字母，中间用一条短横线隔开，可以记作棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，或简记作棱柱 AC_1。

经常以棱柱底面多边形的边数来命名棱柱，依次为三棱柱、四棱柱、五棱柱。____________叫做斜棱柱，如图 2-69（b）所示。________________叫做直棱柱，如图 2-69（a）所示。____________________叫做正棱柱，如图 2-69（c）和 2−69（d）所示，分别为正四棱柱和正五棱柱。

正棱柱有下列性质：

(1)侧棱垂直于底面，______________________；

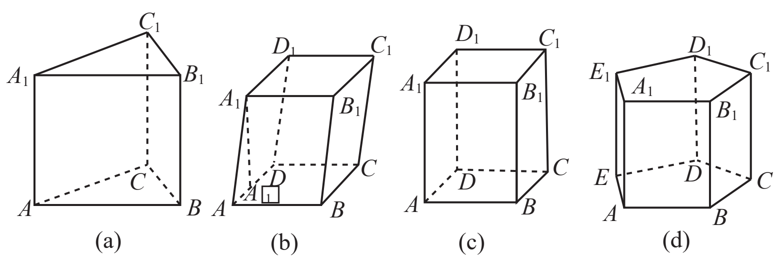


图 2-69

(2)____________________是正棱柱的高。

[想一想]

如果直四棱柱的侧面都是全等的矩形，它是不是正四棱柱？如果四棱柱的底面是正方形，它是不是正四棱柱？________________，叫做正棱柱的侧面积________________，叫做正棱柱的全面积。

正棱柱的侧面积、全面积计算公式分别为

$S_{正棱柱侧}=ch$　　　　$S_{正棱柱全}=ch+2S_{底}$

其中，c 表示正棱柱底面的周长，h 表示正棱柱的高，$S_{底}$ 表示正棱柱底面的面积。

可以得到正棱柱的体积计算公式为(公式推导略)

$V_{正棱柱}=S_{底}h$

2．棱锥的概念及其性质：

有一个面是多边形，其余各面都是三角形，并且这些三角形有一个公共顶点。具备上述特征的多面体叫做_____。多边形叫做_______(简称底)，有公共顶点的三角形面叫做________，各侧面的公共顶点叫做______，顶点到底面的距离叫做______。底面是三角形、四边形、……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、……。通常用表示底面各顶点的字母来表示棱锥。

底面是正多边形，其余各面是全等的等腰三角形的棱锥叫做_________。

正棱锥有下列性质：

(1) 各侧棱的长相等；

(2) 各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高都叫做正棱锥的斜高；

(3) 顶点到底面中心的连线垂直于底面，是正棱锥的高；

(4) 正棱锥的高、斜高与斜高在底面的射影组成一个直角三角形；

(5) 正棱锥的高、侧棱与侧棱在底面的射影也组成一个直角三角形。

正棱锥的侧面积、全面积(表面积)计算公式分别为___________________________。

实验表明，对于同底等高的棱锥与棱柱，棱锥的体积是棱柱体积的三分之一，表示正棱锥的底面的面积，是正棱锥的高。

【典例分析】

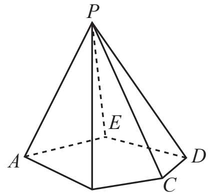


图 2-70

例 1. 图 2-70 中几何体的名称,并用字母表示出该几何体,同时指出其顶点、侧面、底面及侧棱。

解析：该几何体为五棱锥,用字母可表示为棱锥 *P-ABCDE*,顶点为点 *P*,侧面为平面 *PAB*,平面 *PBC*,平面 *PCD*,平面 *PDE*,平面 *PEA*,底面为平面 *ABCDE*,侧棱为 *PA*、*PB*、*PC*、*PD*、*PE*。

例 2．知一个正四棱锥 $S-ABCD$ 的高 *SO* 和底面边长都是 4，求它的侧面积，如图 2-71 所示。

解：过点 *O* 作 $OE\perp BC$ 于点 *E*，连接 *SE*。

则在 $Rt\triangle SOE$ 中，

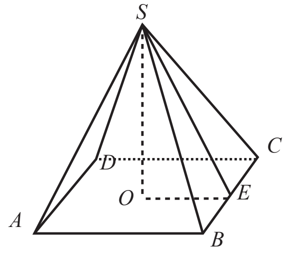


图 2-71

$SE^2=SO^2+OE^2=16+4=20$，所以 $SE=2\sqrt{5}$ 。

因此：

$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'=\frac{1}{2}\times4\times4\times2\sqrt{2}=16\sqrt{5}$，所以正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面积是 $16\sqrt{5}$ 。

例 3．已知一个正三棱柱的底面边长为 4cm，高为 5cm，求这个正三棱柱的侧面积和体积。

解：正三棱锥的侧面积为 $S_{侧}=ch=3\times4\times5 = 60(\text{cm}^2)$。

由于边长为 4 cm 的正三角形面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$ (cm^2)，所以正三棱柱的体积为

$V=S_{底}h=4\sqrt{3}\times 5=20\sqrt{3}$ (cm^3)。

【小提示】边长为 a 的正三角形的面积为$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

【能力检测】

基础闯关

1．下列命题中，正确的是(　　)。

A．有一个侧面是矩形的棱柱是直棱柱　　B．有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱

C．有相邻两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱　D．底面是正多边形的棱柱是直棱柱

2．若一个棱锥的每条侧棱在底面上的射影相等，每个侧面与底面所成的角也相等，则此棱锥为(　　)。

A．正四面体　　B．正棱锥　　C．不是正棱锥　　D．不一定是正棱锥

3．下列四个命题中，真命题是(　　)。

A．棱柱的侧面中，至少有两个面互相平行

B．棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面

C．棱柱中两个互相平行的平面间的距离叫做棱柱的高

D．棱柱的侧面是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形

4．给出下列三个命题：

① 底面是正多边形的棱锥是正棱锥；

② 侧棱长都相等的棱是正棱锥；

③ 侧面是全等的等腰三角形的棱锥是正棱锥，其中正确命题的个数是(　　)。

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

5．若棱柱的各个侧面都是矩形,则此棱柱(　　)。

A．一定是直棱柱　B．不一定是直棱柱　C．一定是斜棱柱　D．一定是正棱柱

能力提升

1．判断下列命题是否正确：

⑴ 直棱柱的侧棱长与高相等；(　)

⑵ 直棱柱的侧面及不相邻的两条侧棱的截面都是矩形；　(　　)

⑶ 正棱柱的侧面是正方形；　(　)

⑷ 如果棱柱有一个侧面是矩形，那么它是直棱柱；(　　)

⑸ 如果棱柱有两个相邻侧面是矩形，　那么它是直棱柱。(　　)

2．具有下列哪一个条件的棱柱是直棱柱(　　)。

A．恰有一个侧面是矩形　　B．恰有两个侧面是矩形

C．有两个相邻侧面垂直于底面　　D．有一条侧棱垂直于底面的两条边

3．若一个棱柱的相邻两个侧面都垂直于底面，则这个侧柱是(　　)。

A．直棱柱　　B．正棱柱　　C．斜棱柱　　D．以上都不对

4．一个棱柱是正四棱柱的条件是(　　)。

A．底面是正方形，有两个侧面是矩形
B．底面是正方形，有两个侧面垂直于底面
C．底面是菱形，且每一个顶点处有两条棱互相垂直
D．底面是正方形，每个侧面都是全等矩形

拓展训练

1．如图 2-72 所示的几何体是(　　)。

A．五棱锥　　B．五棱台　　C．五棱柱　　D．五面体

2．如图 2-73 所示,将装有水的长方体水槽固定底面一边后将水槽倾斜一个小角度,则倾斜后水槽中的水形成的几何体的形状是(　　)。

A．四棱锥　　B．四棱台　　C．四棱柱　　D．四面体

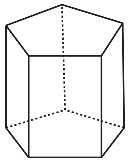


图 2-72

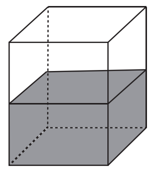


图 2-73

9.5.2　圆柱、圆锥、球

【知识回顾】

1．圆柱：____________________叫做圆柱。旋转轴叫做圆柱的轴，垂直于轴的边旋转形成的圆面叫做圆柱的底面．平行于轴的边旋转成的曲面叫做圆柱的侧面，无论旋转到什么位置，这条边都叫做侧面的母线。两个底面间的距离叫做圆柱的高，圆柱用表示轴的字母表示。如图 2-74 所示的圆柱表示为圆柱 OO' 。

2．圆锥：____________________所围成的几何体叫做圆锥(如图 2-75 所示)。旋转轴叫做圆锥的轴，另一条直角边旋转而成的圆面叫做底面，斜边旋转而成的曲面叫做侧面，无论旋转到什么位置，斜边都叫做侧面的母线，母线与轴的交点叫做顶点．顶点到底面的距离叫做圆锥的高。

3．球体：____________________的曲面叫做球面(如图 2-76 所示)。$\underline{C}$ 叫做球体，简称球。半圆的圆心叫做球心，半圆的半径叫做球的半径，经常用表示球心的字母来表示球，图中所示的球记作球 O。设球心到截面的距离为 d，截面圆的半径为 r，球的半径为 R。则：$r=\sqrt{R^2-d^2}$

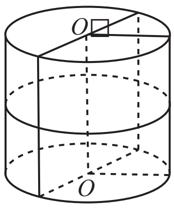


图 2-74

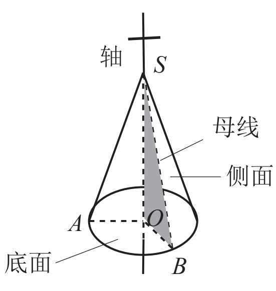


图 2-75

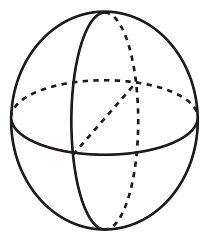


图 2-76

4．圆柱、圆锥、球的面积和体积公式如表 2-9 所列。

表 2-9

名称	圆柱	圆锥	球
$S_{侧}$	$2\pi rl$	πrl	
$S_{全}$	$2\pi r(l+r)$	$\pi r(l+r)$	$4\pi R^2$
V	πr^2h(即 πr^2l)	πr^2h	πR^3

表中 l、h 分别表示母线、高，r 表示圆柱、圆锥与球冠的底半径， R 表示半径。

【典例分析】

例．圆锥的母线与底面直径都等于 a，这个圆锥的侧面积为______________。

解：∵圆锥的底面直径等于 a。

∴底面半径为 $\frac{1}{2}a$，

∴底面圆的周长为 $2\pi\frac{1}{2}a=\pi a$。

又∵圆锥的母线长为 a，

∴圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\cdot\pi a\cdot a=\frac{1}{2}\pi a^2$。　　　故应填 $\frac{1}{2}\pi a^2$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．半圆以它的直径为旋转轴，旋转所成的曲面是(　　　　)。

A．半球　　　B．球　　　C．球面　　　D．半球面

2．直角梯形以其较大的底边为旋转轴，其余各边旋转所得的曲面的几何体可看作(　　)。

A．一个棱柱叠加一个圆锥　　　B一个圆台叠加一个圆锥

C．一个圆柱叠加一个圆锥　　　D．一个圆柱挖去一圆锥

3．给出下列命题：

(1) 圆柱的任意两条母线互相平行；

(2) 球上的点与球心距离都相等；

(3) 圆锥被平行于底面的平面所截，得到两个几何体，其中一个仍然是圆锥，另一个是圆台。

其中正确命题的个数为(　　　　)。

A．0　　　B．1　　　C．2　　　D．3

4．过球面上两点作球的大圆，可能的个数是(　　　　).

A．有且只有一个　　B．一个或无穷多个　　C．无数个　　D．以上均不正确

二、判断正误：(对的打 √，错的打×)

1．圆以其直径为轴旋转所成的曲面叫球。(　　)

2．定点的距离等于定长的所有点的集合叫球。(　　)

3．球内的小圆圆心与球心的连线垂直于这个小圆所在平面。(　　)

4．过球面上不同的两点只能作一个大圆。（　　）

5．球的半径是 5，截面圆的半径为 3，则球心到截面圆所在平面的距离为 4。(　　)

能力提升

1．若圆锥底面半径为 3cm，母线长 5cm，则它的侧面展开图面积是________cm^2。

2．有一圆柱状玻璃杯，底面半径 3cm，高为 8cm，今有一长 12cm 的吸管斜放入杯中，若不考虑吸管粗细，则吸管最少露出杯口处的长度是_______cm。

3．用一个半径为 30cm，圆心角为 120°的扇形纸片做成一圆锥侧面，那么圆锥底面半径是____cm。

4．若圆锥侧面积为$15\pi cm^2$，母线长 5cm，则圆锥的高为 ________cm。

5．圆柱表面积为$30\pi cm^2$，它的高为 2cm，则底面半径为______cm。

拓展训练

试比较等体积的球与正方体的表面积的大小。

分析：首先抓好球与正方体的基本量半径和棱长，找出等量关系，再转化为其面积的大小关系。

9.5.3　简单组合体

【知识回顾】

1．由简单几何体组合而成的几何体叫做简单组合体。现实世界中，我们看到的物体大多数由具有柱、锥、台、球等几何结构特征的物体组合而成。图 2-77（a）是由______________拼接成的，这是多面体与多面体的组合体；图 2-77（b）是由__________________构成的，这是旋转体与旋转体的组合体；图 2-77（c）是由____________________拼接成的，这是旋转体与多面体的组合体。

2．常见的组合体有三种：多面体与多面体的组合；多面体与旋转体的组合；旋转体与旋转体的组合。其基本形式实质上有两种：一种是由简单几何体拼接而成的简单组合体，如图 2-77(a)和 2−77(c)所示的组合体；另一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成的简单组合体，如图 2-77（b）所示的组合体。

3．常见的球与长方体构成的简单组合体及其结构特征：①长方体的八个顶点在同一球面上，此时长方体称为球的内接长方体，球是长方体的外接球，并且长方体的对角线是球的直径；②一球与正方体的所有棱相切，则正方体每个面上的对角线长等于球的直径；③一球与正方体的所有面相切，则正方体的棱长等于球的直径。

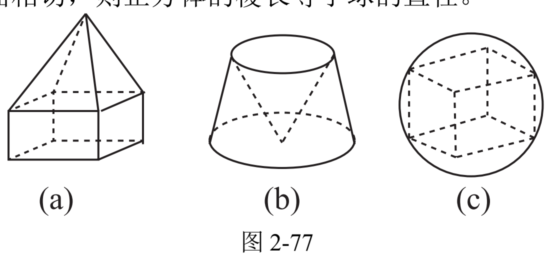
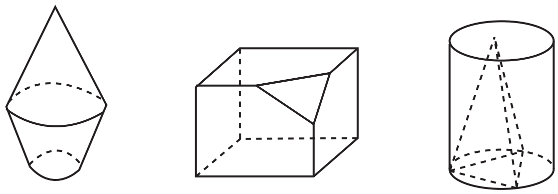


图 2-77

【典例分析】

描述如图 2-78 所示的组合体的结构特征。



(a)　　(b)　　(c)

图 2-78

解：图 2-78（a）是由一个圆锥和一个圆台拼接而成的组合体；

图 2-78（b）是由一个长方体截去一个三棱锥后剩下的部分得到的组合体；

图 2-78（c）是由一个圆柱挖去一个三棱锥剩下的部分得到的组合体。

点评：本题主要考查简单组合体的结构特征和空间想象能力。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．下列结论正确的是(　　)。

A．各个面都是三角形的几何体是三棱锥

B．以三角形的一条边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的曲面所围成的几何体叫圆锥

C．棱锥的侧棱长与底面多边形的边长相等，则该棱锥可能是六棱锥

D．圆锥的顶点与底面圆周上的任意一点地连线都是母线

2．半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所得的几何体是(　　)。

A．球　　B．球面　　C．球或球面　　D．以上均不对

3．下面多面体中有 12 条棱的是(　　)。

A．四棱柱　B．四棱锥　C．五棱锥　　D．五棱柱

4．如图 2-79 的示意图是由图 2-80 中哪个平面图旋转得到的(　　)。

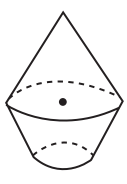
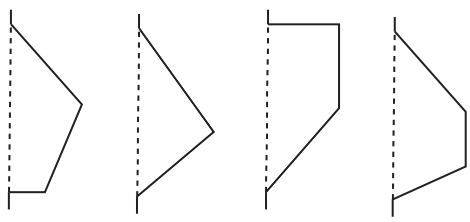


图 2-79



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 2-80

二、填空题

1．简单组合体的构成有两种基本形式：

一种是________________________________；

另一种是____。

2．将一个半径为 R 的木球削成尽可能大的正方体，则正方体的体积是__________；

3．用 6 根长度相等的火柴搭正三角形，最多能搭成________个正三角形。

三、解答题

1．图 2-81 所示的 7 种几何体各属于哪一种，填在横线上。

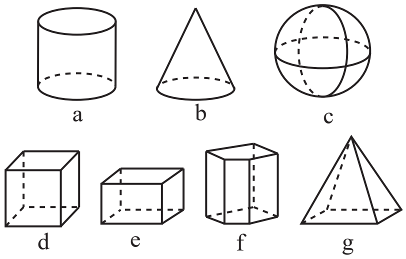


图 2-81

(1) 柱体有________________；　　(2) 锥体有________________；

(3) 球有________________；　　(4) 棱柱有________________；

(5) 圆柱有________________；　　(6) 棱锥有________________；

(7) 圆锥有________________。

2．图 2-82 所示的组合体是由哪些几何体组成的？

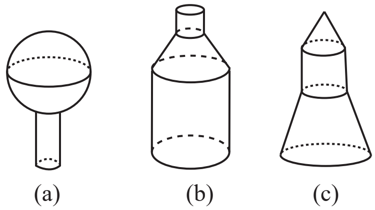


图 2-82

能力提升

1．下列叙述中正确的是(　　)。

A 以直角三角形的一边为轴旋转所得的旋转体是圆锥

B 以直角梯形的一腰为轴旋转所得的旋转体是圆台

C 圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面

D 用一个平面去截圆锥，得到一个圆锥和一个圆台

2．将一个等腰梯形绕着它的较长的底边所在的直线旋转一周，所得的几何体是由(　　)。

A．一个圆台、两个圆锥构成　　B．两个圆台、一个圆锥构成

C．两个圆柱、一个圆锥构成　　D．一个圆柱、两个圆锥构成

3．以钝角三角形的较小边所在的直线为轴，其他两边旋转一周所得到的几何体是(　　)。

A．两个圆锥拼接而成的组合体　　B．一个圆台

C．一个圆锥　　D．一个圆锥挖去一个同底的小圆锥

4．下列命题：

① 在圆柱的上、下两底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；

② 圆锥的顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线；

③ 在圆台上、下两底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆台的母线；

④ 圆柱的任意两条母线相互平行。其中正确的是(　　　)。

A．①②　　B．②③　　C．①③　　D．②④

拓展训练

1．请想一想正方体的截面可能是什么形状的图形？

2．如图 2-83 所示是一个奖杯，可以近似地看作由哪几种几何体组成？

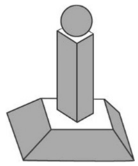


图 2-83

测试题

一、选择题(共48分)

1．三个互不重合的平面把空间分成六个部分时，它们的交线有(　　)。

A．1条　　B．2条　　C．3条　　D．1条或2条

2．两两相交的四条直线确定平面的个数最多的是(　　)。

A．4个　　B．5个　　C．6个　　D．8个

3．四条线段顺次首尾相连，它们最多可确定的平面个数有(　　)。

A．4个　　B．3个　　C．2个　　D．1个

4．在空间，下列命题中正确的是(　　)。

A．若两直线a,b与直线l所成的角相等，那么$a//b$

B．若两直线a,b与平面α所成的角相等，那么$a//b$

C．如果直线l与两平面α，β所成的角都是直角，那么$\alpha//\beta$

D．若平面γ与两平面α,β 所成的二面角都是直二面角，那么$\alpha//\beta$

5．若直线 $a.b$ 异面，直线 $b.c$ 异面，则 $a.c$ 的位置关系是(　　)。

A．异面直线　　B．相交直线　　C．平行直线　　D．以上都有可能

6．正方体$ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$中，所有各面的对角线中与AB_1成60°角的异面直线的条数有(　　)。

A．2条　　B．4条　　C．5条　　D．6条

7．在空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上分别取 E、F、G、H 四点如果 EF 与 HG 交于点 M，则(　　)。

A．M一定在直线AC上　　B．M一定在直线BD上

C．M可能在AC上，也可能在BD上　　D．M不在AC上，也不在BD上

8．在空间四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 AB、CD 的中点，设 $BC+AD=2a$，则 MN 与 a 的大小关系是(　　)。

A．$MN>a$　　B．$MN=a$　　C．$MN<a$　　D．不能确定

9．“$A.b$ 是异面直线”是指：(1) $a\subseteq$平面$\alpha,b\subseteq$平面β,且$a\cap b=\phi$; (2) $a\cap b=\varnothing$,且a,b不平行 (3)$a\subseteq$平面$\alpha,b\not\subset\alpha$; (4)不存在任一平面$\alpha$,使$a\subseteq\alpha$,且$b\subseteq\alpha$. 上述说法中，正确的是(　　)。

A．(1)和(3)　　B．(1)和(4)

C．(1)、(3)和(4)　　　　　　　　D．(1)、(2)、(3)和(4)

10．图 2-84 是一个正方体的展开图，在原正方体中，有下列命题(　　)

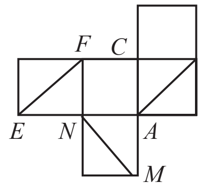


图 2-84

① AB 与 CD 所在直线垂直；　　② CD 与 EF 所在直线平行；

③ AB 与 MN 所在直线成 60°角；　④ MN 与 EF 所在直线异面。

其中正确命题的序号是

A．①③　　B．①④　　C．②③　　D．③④

11．在下列条件中，可判定平面 α 与平面 β 平行的是(　　)。

A．α、β 都垂直于平面 γ

B．α 内不共线的三个点到 β 的距离相等

C．l、m 是 α 内两条直线，且 $l // \beta$，$m // \beta$

D．l、m 是两异面直线，且 $l // \alpha$，$m // \alpha$，且 $l // \beta$，$m // \beta$

12．若 a,b 是不互相垂直的异面直线，平面 α,β 满足 $a\subseteq\alpha, b\subseteq\beta$，则这样的平面 α、β (　　)。

A．只有一对　　B．有两对　　C．有无数对　　D．不存在

二、填空题(共16分)

1. 用一个平面去截正方体。其截面是一个多边形，则这个多边形的边数最多是________。

2．若 E、F、G、H 顺次为空间四边形 $ABCD$ 四条边 AB、BC、CD、DA 的中点，且 $EG=3$，$FH=4$，则 $AC^2+BD^2=$ ____________________。

3．已知 α、β 是两个平面，直线 $l\not\subset\alpha, l\not\subset\beta$，若以① $l\perp\alpha$，② $l // \alpha$ ③ $l\perp\beta$ ④ $l // \beta$ ⑤ $\alpha\perp\beta$ ⑥ $\alpha // \beta$ 中的两个为条件，另一个为结论，则能构成正确命题的是____________。

4．根据如图 2-85 所示的三视图，试画出原来的图形。

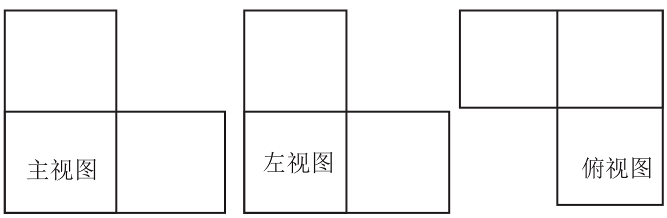


图 2-85

三、解答题（共36分）

1．把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角 $B-AC-D$，E、F 分别为 AD、BC 的中点，O 为正方形的中心，求折起后 $\angle EOF$ 的大小。

2．在如图 2-86 所示的正方体 AC_1 中，E 为 BC 中点。

(1)求证：$BD_1 //$ 平面 C_1DE；

(2) 在棱 CC_1 上求一点 P，使平面 $A_1B_1P\perp$平面 C_1DE。

3．如图 2-87 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 P，Q，R，S 分别为棱 A_1D_1，A_1B_1，AB，BB_1 的中点。求证：平面 $PQS\perp$平面 B_1RC。

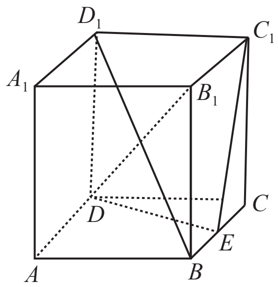


图 2-86

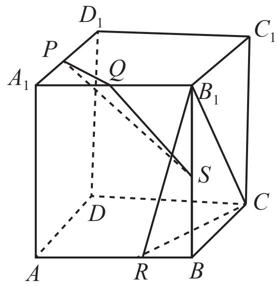


图 2-87

第 10 章　概率与统计初步

10.1　计数原理

【知识回顾】

1．分类计数原理：一般地，完成一件事，有 n 类方式。第 1 类方式有 k_1 种方法，第 2 类方式有 k_2 种方法，……，第 n 类方式有 k_n 种方法，那么完成这件事的方法共有________(种)。

2．分步计数原理：一般地，如果完成一件事，需要分成 n 个步骤，完成第 1 个步骤有 k_1 种方法，完成第 2 个步骤有 k_2 种方法，……，完成第 n 个步骤有 k_n 种方法，并且只有这 n 个步骤都完成后，这件事才能完成，那么完成这件事的方法共有______________(种)。

【典例分析】

例 1．三个袋子里分别装有 3 个红色球，5 个蓝色球和 6 个白色球．任取出一个球，共有多少种取法？

解：取出一个球，可能是红色球、蓝色球或白色球。

第一类：取红色球，从 3 个红色球中任意取出一个，有 $k_1=3$ 种方法；

第二类：取蓝色球，从 5 个蓝色球中任意取出一个，有 $k_2=5$ 种方法；

第三类：取白色球，从 6 个白色球中任意取出一个，有 $k_3=6$ 种方法。

由分类计数原理知，不同的取法共有：N=3+5+6=14(种)。

例 2．某校计算机班有男生 30 人，女生 20 人，若要选男、女生各 1 人作为班级生活委员，共有多少种选法？

解：这件事可以分成两个步骤完成。

第一步：从 30 名男生中选出 1 人，有 $k_1=30$ 种选法；

第二步：从 20 名女生中选出 1 人，有 $k_2=20$ 种选法。

由分步计数原理有：$N=30\times20=600$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．张老师有 3 件衬衫、4 条裤子、2 双皮鞋，用它们一共可以搭配(　　)种不同的穿法。

A．9　　B．14　　C．24　　D．6

2．从 3 名女同学和 2 名男同学中选 1 人主持本班的某次主题班会，则不同的选法有(　　) 种。

A．3　　B．2　　C．5　　D．4

3．一个乒乓球队里有男队员 5 人，女队员 4 人，从中选出男、女队员各一名组成混合双打，共有(　　) 种不同的选法。

A．18　　B．19　　C．20　　D．21

4．一个学生从 3 本不同的科技书、4 本不同的文艺书、5 本不同的外语书中任选一本阅读，不同的选法有(　　)种。

A．10　　B．11　　C．12　　D．13

二、填空题

1．六个同学排成一排照相，共有 ________ 种不同的排法。

2．有一项活动需在 3 名老师，8 名男同学和 5 名女同学中选人参加。

(1) 若只需一人参加，有________种不同的选法。

(2) 若需一名老师，一名学生参加，有________种不同的选法。

(3) 若只需老师，男同学，女同学各一人参加，有________种不同的选法。

三、解答题

1．书架上有 8 本数学书、3 本语文书、11 本英语书。如果从书架上任取一本，共有多少种不同取法？

2．某职业学校计算机班的同学分为两个小组，甲组有 15 人、乙组有 16 人。现要选派 1 人参加学校的技能活动，有多少种不同的方法？

3．两个箱子中分别装有 15 本数学课本和 8 本语文课本．从中取出一本数学课本和一本语文课本，共有多少种方法？

4．书架的第一层放有 8 本不同的计算机书、第二层放有 9 本不同的文艺书、第 3 层放有 11 本不同的体育书。

(1) 从书架上任取 1 本书有多少种不同的取法？

(2) 从书架的第 1、2、3 层各取 1 本书有多少种不同的取法？

能力提升

一、选择题

1．学校举办班级乒乓球比赛，共有 16 支球队参加，比赛采用单场淘汰制(即每场比赛淘汰 1 支球队)．一共要进行(　　)场比赛后才能产生冠军。

A．13　　B．14　　C．15　　D．16

2．从分别写有 1，2，3，…，9 九张数字的卡片中，抽出两张数字和为奇数的卡片，共有（　）种不同的抽法。

A．19　　B．20　　C．21　　D．22

3．一商场有 3 个大门，商场内有 2 个楼梯，顾客从商场外到二楼的走法有（　）种。

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

二、填空题

1．从甲地到乙地有 2 种走法，从乙地到丙地有 2 种走法，从甲地不经过乙地到丙地有 4 种走法，则从甲地到丙地共有__________种不同的走法。

2．已知两条异面直线上分别有 2 个点和 3 个点，则经过这 5 个点可确定___________个不同的平面。

三、解答题

1．在一次读书活动中，有 5 本不同的政治书，10 本不同的科技书，20 本不同的小说书供学生选用。(1)某学生若要从这三类书中任选一本，则有多少种不同的选法？(2)若要从这三类书中各选一本，则有多少种不同的选法？(3)若要从这三类书中选不属于同一类的两本，则有多少种不同的选法？

2．为了对某农作物新品种选择最佳生产条件，在分别有 3 种不同土质，2 种不同施肥量，4 种不同种植密度，3 种不同播种时间的因素下进行种植实验，则不同的实验方案共有

多少种？

拓展训练

1．从南京到上海的某次快车中途要停靠六个大站。铁路局要为这次快车准备多少种不同的车票？

2．用 2、3、7、8 四个数字组成四位数，每个数中不许有重复数字，一共可以组成多少个不同的四位数？

3．学校运动会上，六(1)班同学有 22 人参加拔河比赛，有 12 人参加迎面接力赛跑，有 10 人参加集体跳绳。其中有 6 人既参加拔河比赛又参加了接力赛跑，还有 8 人既参加了迎面接力赛跑又参加了集体跳绳。六(1)班同学一共有多少人参加了比赛？三项比赛都参加的同学至少有多少人？

10.2　概率

10.2.1　随机事件、频率与概率

【知识回顾】

1．___________________：在一定的条件下，某些现象可能发生，也可能不发生，事先不能断定出现哪种结果 (偶然现象)。

2．___________________：在一定的条件下，某些现象事先就能断定发生或者不发生 (必然现象)。

3．___________________：在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，如明天下雨。

4．___________________：在一定条件下，必然会发生的事件，如通电导体发热。

5．___________________：在一定条件下，肯定不会发生的事件，如磁铁同极相互吸引。

6．___________________：是指在多次重复试验中某事件发生的次数与试验次数的比值。

7．___________________：当试验次数充分大时，如果事件 A 发生的频率___________________总稳定在某个常数附近，那么，就把这个常数叫做事件 A 发生的概率，记作 $P(A)$。

8．在 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数 m 总是满足 $0\leqslant m\leqslant n$，所以 $0\leqslant \frac{m}{n}\leqslant 1$。由此得到事件的概率具有下列性质：

(1) 对于必然事件 Ω，___________________；

(2) 对于不可能事件 $\varnothing$，___________________；

(3) ___________________。

9．在试验和观察中不能再分的最简单的随机事件，叫做___________________。像事件 C 那样，可以用基本事件来描绘的随机事件叫做___________________。

【典例分析】

例 1．掷一颗骰子，观察点数，这一试验的基本事件数为 (　　　　　　)。

A．1　　　B．3　　　C．6　　　D．12

例 2．下列语句中，表示随机事件的是(　　　　　)。

A．掷三颗骰子出现点数之和为19　　B．从54张扑克牌中任意抽取5张

C．型号完全相同的红、白球各3个，从中任取一个是红球　D．异性电荷互相吸引

解：(略)

例 3．下列语句中，不表示复合事件的是(　　　　　　)。

A．掷三颗骰子出现点数之和为8　　　B．掷三颗骰子出现点数之和为奇数

C．掷三颗骰子出现点数之和为3　　　D．掷三颗骰子出现点数之和大于13

解：(略)

例 4．某数控班要了解学生对五门任课教师的满意程度，进行了“问卷”，结果如表 2-10 所列。

表 2-10

被调查人数 n	50	52	54	49	50
满意人数 m	37	47	46	47	48
满意频率 $\dfrac{m}{n}$					

(1) 计算表中的各个频率；

(2) 学生对任课教师的满意的概率 $P(A)$约是多少？

解：(略)

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．随机掷一枚均匀的硬币两次，两次正面都朝上的概率是(　　)。

A．$\dfrac{1}{4}$　　　B．$\dfrac{1}{2}$　　　C．$\dfrac{3}{4}$　　　D．1

2．下列事件中，属于必然事件的是(　　)。

A．明天我市下雪

B．我走出工作单位，看到的第一辆汽车的牌照的末位数字是偶数

C．抛一枚硬币，负面朝上

D．一口袋中装有2个红球和1个白球，从中摸出3个球，其中有红球

3．掷一颗骰子，观察点数，这一试验的基本事件数为(　　)。

A．1　　　B．3　　　C．6　　　D．12

二、填空题

1．三个人性别各不相同，这个事件是________________。

2．从 12 个同类产品(其中 10 个正品，2 个次品)中，任意抽出 2 个，抽到 1 个次品的概率是______________________________。

3．将 5 封信投入 3 个邮筒，不同的投法有__________。

三、解答题

1．某射手在一次射击中命中 9 环的概率是 0.28，8 环的概率是 0.19，不够 8 环的换得概率是 0.29，计算这个射手在一次射击中命中 9 环或 10 环的概率？

2．在 4 张卡片上分别写有 1~4 的整数，随机抽取一张后放回，再随机地抽取一张，求

第二次取出的数字能够整除第一次取出的数字概率。

3．某学校要了解学生对自己专业的满意程度，进行了 5 次“问卷”，结果如表 2-11 所示。

表 2-11

被调查人数 n	500	502	504	496	505
满意人数 m	404	476	478	472	464
满意频率 $\dfrac{m}{n}$					

(1)计算表中的各个频率；

(2)学校学生对自己所学专业满意的概率 $P(A)$约是多少？

能力提升

一、选择题

1．同时抛掷两颗骰子，总数出现 9 点的概率是(　　)。

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{1}{6}$　　D $\dfrac{1}{9}$

2．某人参加一次考试，4 道题中解对 3 道则为及格，已知他的解题准确率为 0.4，则他能及格的概率约是(　　)。

A．0.18　　B．0.28　　C．0.37　　D．0.48

二、填空题

1．在“石头、剪子、布”的游戏中，两人做同样手势的概率是________。

2.从-2、-1、0、1、2 这 5 个数中任取一个数，作为关于 x 的一元二次方程 $x^2-x+k=0$ 的 k 值，则所得的方程中有两个不相等的实数根的概率是______。

3．投掷两枚骰子，出现点数之和为 3 的概率为________。

三、解答题

1．加工某一零件共需经过三道工序，设第一、二、三道工序的次品率分别为 2％、3％、5％，假定各道工序是互不影响的，问加工出来的零件的次品率是多少？

2．已知某类型的高射炮在它们控制的区域内击中具有某种速度敌机的概率为 20％。

(1) 假定有 5 门这种高射炮控制某个区域，求敌机进入这个区域后被击中的概率；

(2) 要使敌机一旦进入这个区域后有 90％以上的可能被击中，需至少布置几门这类高射炮？

拓展训练

一个电路板上装有甲、乙两个保险丝，若甲熔断的概率为 0.2，乙熔断的概率为 0.3，至少有一根熔断的概率为 0.4，则两根同时熔断的概率是多少？

10.2.2　古典概型

【知识回顾】

1．如果一个随机试验可能出现的结果只有有限个，即基本事件总数是有限的，并且每个基本事件发生的可能性相同，那么称这个随机试验________________。

一般地，在古典概型中，如果基本事件的总数为 n，那么任一基本事件中 A_i (i＝1，2，⋯，n)发生概率为 $P(A_i)=\frac{1}{n}$；而包含 m 个基本事件的事件 A 的概率为

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

2．在一次试验中不可能同时发生的两个事件叫做________________。

3．如果 A、B 是互斥事件，那么 $P(A\cup B)=$ ________________(概率加法公式)。

【典例分析】

例 1．袋中有 1 个白色乒乓球和 1 个红色乒乓球．从袋中任意取出 1 个球，求取到白色球的概率。

解：这是古典概型问题．取出的乒乓球可能是白球或者是红球两种情况，而且这两种情况的出现是等可能的。

设 A ={白球}，则基本事件总数 n=2．因为取出白球只是其中的一种情况，所以事件 A 包含的基本事件数 m=1，故出现白球的概率为

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$。

例 2．袋中装有编号为 1,2,3,4,5,6 的 6 个球，现从袋中任取一个球，求 C={点数为奇数或 2}球的概率。

解：设 A={点数为奇数}，B={点数为 2}，则事件 A 与事件 B 为互斥事件，并且

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{6}$, 所以 $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．在掷一颗骰子的试验中，下列 A 和 B 是互斥事件的是（　　　　）。

A．A=｛1,5｝,B=｛3，5，6｝　　B．A=｛2,3｝,B=｛1，3，5｝

C．A=｛2，3，4,5｝,B=｛1，2｝　　D．A=｛2，4，6｝,B=｛1，3｝

2．在 100 张奖券中有 2 张中奖，从中任抽一张，则中奖的概率是（　　　　）。

A．$\frac{1}{100}$　　B．$\frac{1}{50}$　　C．$\frac{1}{25}$　　D．$\frac{1}{5}$

3．任选一个两位数，它既是奇数，又是偶数的概率是（　　　　）。

A．$\frac{7}{97}$　　B．$\frac{21}{90}$　　C．$\frac{51}{90}$　　D．0

二、填空题

1．若事件 A、B 互斥，且 $p\left(A\right)=\dfrac{1}{6}$，$p\left(B\right)=\dfrac{2}{3}$，则 $p\left(A\cup B\right)=$_________。

2．1 个口袋内有带标号的 7 个白球，3 个黑球，事件 A：“从袋中摸出 1 个是黑球，放回后再摸 1 个是白球”的概率是________________

三、解答题

1．在 12 张奖券中，有 1 张一等奖，2 张二等奖，3 张三等奖，从中抽取 1 张，求中奖的概率？

2．从 1、2、3、4、5、6 六个数字中任取两个数，计算它们都是偶数的概率。

3．抛掷两颗骰子，求：①总点数出现 5 点的概率；②出现两个相同点数的概率。

能力提升

一、选择题

1．事件 A 与事件 B 的和 “$A\cup B$”意味 A、B 中(　　)。

A．至多有一个发生　B．至少有一个发生　C．只有一个发生　D．没有一个发生

2．已知事件 A、B 发生的概率都大于 0，则(　　)。

A．如果A、B是互斥事件，那么A与B也是互斥事件

B．如果A、B不是相互独立事件，那么它们一定是互斥事件

C．如果A、B是相互独立事件，那么它们一定不是互斥事件

D．如果A、B是互斥且BA是必然事件，那么它们一定是对立事件

二、填空题

1．设 A、B、C 是三个事件，“A、B、C 至多有一个发生”这一事件用 A、B、C 的运算式可表示为_______。

2．先后抛掷两枚均匀的硬币，出现一枚正面，一枚反面的概率是__________________。

三、解答题

1．某城市的电话号码是 8 位数，如果从电话号码本中任指一个电话号码，求：

(1) 头两位数码都是 8 的概率；　　(2) 头两位数码至少有一个不超过 8 的概率；

(3) 头两位数码不相同的概率。

2 某班主任对全班 50 名学生进行了作业量多少的调查，数据如表 2-12 所列。

表 2-12

	认为作业多	认为作业不多	总数
喜欢电脑游戏	18	9	27
不喜欢电脑游戏	8	15	23
列总数	26	24	50

如果校长随机地问这个班的一名学生，下面事件发生的概率是多少？

(1) 认为作业多；　　(2) 喜欢电脑游戏并认为作业不多。

拓展训练

A，B，C，D 4 名学生按任意次序站成一排，试求下列事件的概率：(1) A 在边上；(2) A 和 B 都在边上；(3) A 和 B 都不在边上。

10.3　总体与样本及抽样方法

【知识回顾】

1．统计对象的全体称为___________，组成总体的每一个具体对象称为____________。

2．被抽取出来的个体的集合叫做总体的______，样本所含个体的数目叫做________。

3．随机抽样：

(1) 随机抽样是指在抽取样本时遵循机会均等的原则，即总体中的每一个个体都有同等的机会被抽出，用这种方法抽得的样本叫__________；

(2) 常用的抽样方法有简单随机抽样、系统抽样、分层抽样。

从元素个数为 N 的总体中不放回地抽取容量为 n 的样本，且每一次抽取时各个个体被抽到的概率相等，叫_______________(抽签法、随机数表法、计算机(器)产生随机数法)；

总体所含个体较多，将总体均衡地分成几个部分，然后按照预先制定的规则，从每个部分中抽取一个个体，得到所需的样本，叫做_______________(机械抽样)；

总体由差别明显的几个部分组成，先将总体按个体差异分成层次分明且互不重叠的几部分，然后按各部分在总体中所占比例进行简单随机抽样，叫做_______________。

【典例分析】

例 1．测量某班学生的身高，指出其中的总体与个体。

解：该班所有学生的身高是总体，每一个学生的身高是个体。

例 2．研究某校学生上学期数学期末考试成绩，随机抽取 200 名学生的成绩，请指出其中的总体、个体、样本与样本容量。

解：该校所有学生的数学成绩是总体，每一个学生的数学成绩是个体，被抽取的 200 名学生的数学成绩是样本，样本容量是 200。

例 3．某班有 50 名同学，学号为 1~50，试利用随机数从中抽取 10 名同学去参加义务劳动。

解：将计算器的精确度设为 0.01，取小数点后面的两位数作为抽取的学号，如果超过 50 就舍去，重复的也舍去．这样，用计算器得到随机数：

0.08，　0.03，　0.75，　0.53，　0.13，

0.10，　0.44，　0.78，　0.12，　0.79 ，

0.38，　0.78，　0.74，　0.97，　0.19，

0.90，　0.87，　0.21，　0.53，　0.50。

所以抽到的同学的学号是

8，　3，　13，　10，　44，　12，　38，　19，　21，　50。

例 4．某学校为了解 2017 级新生的期末数学成绩情况，从 1000 名新生中，利用系统抽样，抽取一个容量为 50 的样本．请你来完成这个抽样。

解　将这 1000 名学生编号(也可以利用新生录取号)，由于 $\dfrac{1000}{50}=20$，

所以取每段间隔为 20，将编号分成 50 段，规定各段抽取第 16 个顺序号的学生，得到容量为 50 的样本．其学生号码依次为

16，36，56，76，　…，996。

例 5．考察某班的身体情况，应该如何抽取样本较好 (该班的男女比例为 5∶4) ？

解：按照 5∶4 的比例从该班的学生中抽取样本。

【能力检测】

1．为了解某班的学习状况，随机抽取 150 名学生测试，请指出其中的总体、个体、样本与样本容量。

2．为了了解某校的体育生学习情况，随机抽取 30 名体育生进行测试。指出其中的总体、个体、样本与样本容量。

3．在某班级中，随机选取 5 名同学去参加学校的运动会，指出其总体、个体、样本与样本容量关系。

4．某中职学校共有 20 名体育生，从中选出 3 人调查学习成绩情况，调查应采用的抽样方法是(　　　)。

A．随机抽样法　　B．分层抽样法　　C．系统抽样法　　D．无法确定

5．请用抽签法从某班 40 人中抽出 8 人参加学校的教学质量调查会议，写出抽取的过程。

6．某职校有实训班学生 1200 人，对口班学生 400 人，现要抽取 60 名学生成立学生代表大会，应该如何选取学生较好？

7．分别使用抓阄法和随机数法抽取一个体育彩票的号码(七个数字)。

8．学校一年级新生的 1000 人中，抽出 100 进行体能检测，分别使用抓阄法和随机数法进行抽样。比较抽样过程，你感觉到哪种方法好？

9．某学校共有 3000 名学生，计划抽取 100 人进行兴趣调查。请你用系统抽样来完成。

10．现在要对某班的学生进行身体检查．该班有 30 名男生 20 名女生，现需要对 5 名学生进行检查，应该如何抽取样本较好？

10.4　用样本估计总体

【知识回顾】

1．各组内数据的个数，叫做该组的__________________。每组的频数与全体数据的个数之比叫做该组的__________________。

2．如果有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，那么 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 叫做这 n 个数的______________________，$\bar{x}$ 读作“x 拔”。均值反映出这组数据的平均水平。

3．由于样本方差的单位是数据的单位的平方，使用起来不方便．因此，人们常使用它的算术平方根来表示个体与样本均值之间偏离程度，叫做__________________。即

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$$

【典例分析】

例 1．某工厂从去年全年生产某种零件的日产记录(件)中随机抽取 30 份，得到以下数据：

446	445	447	457	449	452	441	445	458	450
454	444	446	442	445	458	448	445	446	457
450	445	452	449	446	456	451	455	452	448

列出频率分布表。

解：分析样本的数据．其最大值是 458，最小值是 441，它们的差是 458−441=17。取组距为 4，确定分点，将数据分为 6 组。

列出频数分布表如表 2-13 所示。

表 2-13

分　组	频 数 累 计	频　数
440.5～443.5	丅	2
443.5～446.5	正 正	10
446.5～449.5	正	5
449.5～452.5	正 一	6
452.5～455.5	丅	2
455.5～458.5	正	5
合　　计	30	30

点评：设定分点数值时需要考虑分点值不要与样本数据重合。

例 2．要从某班的两名学生中选一名学生参加演讲比赛，选他们的十次面试成绩，两名学生的 10 次面试成绩如表 2-14 所示。

表 2-14

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲学生	9.2	9.0	9.5	8.7	9.9	10.0	9.1	8.6	8.5	9.1
乙学生	9.1	8.9	9.3	9.7	9.9	9.9	8.9	9.2	9.6	8.8

你觉得选哪位选手参加比赛合适呢？

解：将这 10 次面试成绩作为一个样本，来对两名学生的演讲进行估计，分别计算数据的均值，得

$$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}(9.2+9.0+9.5+8.7+9.9+10.0+9.1+8.6+8.5+9.1)$$

$$=9.16$$

$$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{10}(9.1+8.9+9.3+9.7+9.9+9.9+8.9+9.2+9.6+8.8)$$

$$=9.33$$

显然　　　$\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$

由此估计，乙学生的演讲平均水平高于甲，所以应选择选手乙去参加比赛。

【能力检测】

基础闯关

一、选择题

1．用样本频率分布估计总体频率分布的过程中，下列说法正确的是(　　)。

A．总体容量越大，估计越精确　　B．总体容量越小，估计越精确

C．样本容量越大，估计越精确　　D．样本容量越小，估计越精确

2．频率分布中，小长方形的面积等于(　　)。

A．组距　　B．频率

C．组数　　D．频数

二、填空题

1．一个容量为 n 的样本，分成若干组，已知甲组的频数和频率分别为 36 和 14，则容

量 n＝ ________，且频率为 1 6 的乙组的频数是________。

2．将容量为 n 的样本中的数据分成 6 组，绘制频率分布直方图。若第一组至第六组数据的频率之比为 2∶3∶4∶6∶4∶1，且前三组数据的频数之和等于 27，则 n＝________。

三、解答题

1．某老师从星期一到星期五收到的信件数分别为 10、6、8、5、6，则该组数据的方差是多少？

2．一组数据的平均数是 4.8,方差是 3.6,若将这组数据中的每一个数据都加上 60,得到一组新数据,则所得新数据的平均数和方差分别是多少？

3．已知总体的各个体的值由小到大依次为 2、3、3、7、a、b、12、13、7、18、3、20，且总体的中位数为 10.5,若要使该总体的方差最小,则 a,b 的取值分别是多少？

能力提升

1．抽样统计甲、乙两位设计运动员的 5 次训练成绩(单位：环)，结果如下：

运动员	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

则成绩较为稳定(方差较小)的那位运动员成绩的方差为多少？

2．已知一个样本中的数据为 1、2、3、4、5，那么该样本的标准差为多少？

10.5　一元线性回归

【知识回顾】

1．变量之间的这种非确定性的相互依存的关系叫做________________。它的特点是，当一个变量或 n 个变量的值确定后，另一个变量的值虽然与它(或它们)有着密切的关系，但却无法完全确定。

2．每位学生的身高与体重组成的有序数对 ，对应于平面上一个点，这些点组成的图形叫做________________。

3．人的体重 y 与身高 x 大体上有一次函数的关系，即可以近似地有 $y=a+bx$　方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$　叫做 y 关于 x 的__________，它的图形叫做____________，$\hat{a}$ $\hat{b}$ 叫做回归系数。

【典例分析】

例．随机抽取某班的 8 个学生的期末总分和数学成绩的数据如表 2-15 所列。

表 2-15

编号	1	2	3	4	5	6	7	8
总分 x	172	150	170	165	180	176	155	160
数学 y	60	47	85	70	75	80	50	65

求数学成绩 y 关于总分 x 的一元线性回归方程。

解：（1）设置统计计算状态(STAT)。

操作：按一次 MODE ，会显示1:COMP　2:STAT　3:TABLE　，表示进入计算状态选项，按 2 进入统计计算模块。

（2）输入数据。

操作：在上一步的基础上，按键　2　进入线性回归计算(A+Bx)指令，　依次输入数值，即 172 →$\boxed{=}$ → 150 →$\boxed{=}$ → 170 →$\boxed{=}$ → 165 →$\boxed{=}$ → 180 →$\boxed{=}$ → 176 →$\boxed{=}$ → 155 →$\boxed{=}$ → 160 →$\boxed{=}$ ，然后用中间光标键把输入位置移到 Y 下的第一位置，依次输入的数值，即 60 → $\boxed{=}$ → 47 → $\boxed{=}$ → 85 → $\boxed{=}$ → 70 → $\boxed{=}$ → 75 → $\boxed{=}$ → 80 → $\boxed{=}$ → 50 → $\boxed{=}$ → 65 → AC。在输入中注意 x 的量和 y 的量要对应起来。

（3）显示计算结果。

①按键 $\boxed{\text{SHIFT}}$→ $\boxed{1}$，然后按键 $\boxed{5}$，最后依次按键 $\boxed{1}$→ $\boxed{=}$，显示回归系数，$A=-105$　。

②按键 $\boxed{\text{SHIFT}}$→ $\boxed{1}$ ，然后按键 $\boxed{5}$，最后依次按键 $\boxed{2}$→ $\boxed{=}$ ，显示回归系数，$B=1.02$ 。

因此总分与数学成绩的关系的线性回归方程为 $y=1.02x-105$

即　数学成绩≈总分−105。

【能力检测】

一、选择题

1．具有相关关系的两个变量的特点是(　　)。

A．一个变量的取值不能由另一个变量唯一确定

B．一个变量的取值由另一个变量唯一确定

C．一个变量的取值增大时另一个变量的取值也一定增大

D．一个变量的取值增大时另一个变量的取值肯定变小

2．下面的各问题中，哪个不是相关分析要解决的问题（　　)。

A．判断变量之间是否存在关系

B．判断一个变量数值的变化对另一个变量的影响

C．描述变量之间的关系强度

D．判断样本所反映的变量之间的关系能否代表总体变量之间的关系

3．下列不属于相关关系的现象是(　　)。

A．银行的年利息率与贷款总额　　B．居民收入与储蓄存款

C．电视机的产量与鸡蛋产量　　D．某种商品的销售额与销售价格

三、解答题

1．假设某国的货币供给量 y 与国民收入 x 的历史数据如表 2-16 所示。

表 2-16

年份	y	x
1985	2	5
1986	2.5	5.5
1987	3.2	6
1988	3.6	7
1989	3.3	7.2
1990	4	7.7
1991	4.2	8.4
1992	4.6	9

年份	y	x
1993	4.8	9.7
1994	5	10
1995	5.2	11.2
1996	5.8	12.4

请回答以下问题：

(1) 作出散点图，然后估计货币供给量 y 对国民收入 x 的回归方程，并把回归直线画在散点图上。

(2) 如何解释回归系数的含义？

(3) 如果希望 1997 年国民收入 y 达到 15.0，你们应该把货币供给量定在什么水平？

2．我国 1978−2001 年的财政收入 y 和国民生产总值 x 的数据资料如表 2-17 所示。

表 2-17

年份	x	y
1978	3624.1	1132.26
1979	4038.2	1146.38
1980	4517.8	1159.93
1981	4860.3	1175.79
1982	5301.8	1212.33
1983	5957.4	1366.95
1984	7206.7	1642.86
1985	8989.1	2004.82
1986	10201.4	2122.01
1987	11954.5	2199.35
1988	14922.3	2357.24
1989	16917.8	2664.9
1990	18598.4	2937.1
1991	21662.5	3149.48
1992	26651.9	3483.37
1993	34560.5	4348.95
1994	46670	5218.1
1995	57494.9	6242.2
1996	66850.5	7407.99
1997	73142.7	8651.14
1998	76967.2	9875.95
1999	80579.4	11444.08
2000	88254	13395.23
2001	95727.9	16386.04

试根据资料完成下列问题：

(1) 建立财政收入对国民生产总值的一元线性回归方程，并解释回归系数的经济意义；

(2) 求置信度为95%的回归系数的置信区间；

(3) 对所建立的回归方程进行检验(包括经济意义检验、拟合优度检验、参数的显著性检验)；

(4) 若 2002 年国民生产总值为 103 553.60 亿元，求 2002 年财政收入预测值及预测区间。

测试题

一、单选题（共36分）

1．下列语句中，表示随机事件的是（　　）。

A．掷四颗骰子出现点数之和为20

B．从54张扑克牌中任意抽取5张

C．型号完全相同的红、白球各3个，从中任取一个是红球

D．异性电荷互相吸引

2．下列语句中，不表示复合事件的是（　　）。

A．掷三颗骰子出现点数之和为8

B．掷三颗骰子出现点数之和为奇数

C．掷三颗骰子出现点数之和为3

D．掷三颗骰子出现点数之和大于13

3．同时抛掷两枚质地均匀的硬币，则出现两个正面的的概率是(　　)。

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{8}$

4．在掷一颗骰子的试验中，下列 A 和 B 是互斥事件的是（　　）。

A．$A=\{1,5\}$,$B=\{3，5，6\}$　　B．$A=\{2,3\}$,$B=\{1，3，5\}$

C．$A=\{2，3，4,5\}$,$B=\{1，2\}$　　D．$A=\{2，4，6\}$,$B=\{1，3\}$

5．在 100 张奖券中有 2 张中奖，从中任抽一张，则中奖的概率是(　　)。

A．$\frac{1}{100}$　　B．$\frac{1}{50}$　　C．$\frac{1}{25}$　　D．$\frac{1}{5}$

6．任选一个两位数，它既是奇数，又是偶数的概率是(　　)。

A．$\frac{7}{97}$　　B．$\frac{21}{90}$　　C．$\frac{51}{90}$　　D．0

二、填空题(共24分)

1．已知 x_1,x_2,x_3 的平均数是 a，则 $5x_1+7.5x_2+7.5x_3+7$ 的平均数是______；

2．将 5 封信投入 3 个邮筒，不同的投法有__________；

3．投掷两枚骰子，出现点数之和为 3 的概率为________；

4．在“石头、剪子、布”的游戏中，两人做同样手势的概率是________；

5．某中职学校共有 20 名男足球运动员，从中选出 3 人调查学习成绩情况，调查应采用的抽样方法是　______；

6．从−2、−1、0、1、2 这 5 个数中任取一个数，作为关于 x 的一元二次方程　$x^2-x+k=0$ 的 k 值，则所得的方程中有两个不相等的实数根的概率是______。

三、解答题（40分）

1．某射手在一次射击中命中 9 环的概率是 0.28，8 环的概率是 0.19，不够 8 环的换得概率是 0.29，计算这个射手在一次射击中命中 9 环或 10 环的概率。

2．在 4 张卡片上分别写有 1~4 的整数，随机抽取一张后放回，再随机地抽取一张，求第二次取出的数字能够整除第一次取出的数字的概率。

3．一次射击练习，甲.乙二人各射靶 5 次，命中的环数如下：

甲：7、8、6、8、6 ， 乙：9、5、6、7、8。

问谁射击成绩较稳定。

第三篇　综合模拟题

模拟题一

一、单选题（把答案写在表格中，8小题，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	分数
答案									

1．六个关系式：①$\{a,b\}\subseteq\{a,b\}$，②$\{a,b\}=\{b,a\}$，③$\varnothing\in\{0\}$，④$0\in\{0,1,2\}$，⑤$\varnothing\in\{0\}$，⑥$\varnothing=\{0\}$，其中正确的个数为（　　）个。

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

2．一次函数的图象过点（1，0）及点（0，1），则此函数的解析式是（　　）。

A．$y=-x+1$　　B．$y=x+1$　　C．$y=x-1$　　D．$y=-x-1$

3．不等式$(x+2)^2\leqslant 0$ 的解集是　　）。

A．$\varnothing$　　B．R　　C．$\{2\}$　　D．（$-\infty$，-2）U（$-2,+\infty$）

4．若函数 $f(x)=3x-1$,$g(x)=x^2$，则 $g(f(1))=$（　　）。

A．1　　B．0　　C．2　　D．4

5．若奇函 $f(x)$在区间$[3,6]$上是增函数且最小值为 9，那么 $f(x)$在区间$[-6,-3]$上是（　　）。

A．增函数，且最大值是-9　　B．减函数，且最大值是-9

C．增函数，且最小值是-9　　D．减函数，且最小值是-9

6．下列各对向量中，共线的是（　　）。

A．$a=(2,3),b=(3,-2)$　B．$a=(2,3),b=(4,-6)$　C．$a=(1,2),b=(2,1)$　D．$a=(2,3),b=(4,6)$

7．已知直线 l 的斜率 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 l 的倾斜角　α ＝（　　）。

A．45°　　B．60°　　C．30°　　D．120°

8．下列命题中，正确的个数是（　　）。

① 分别位于两个平面内的两条直线是异面直线。② 平行于同一个平面的两条直线互相平行。③ 过平面外一点，可以作无数条直线与已知平面平行。④ 如果两个平面互相平行，那么分别在这两个平面的直线都平行。

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题（每题5分，共20分）

1．已知 $a=(-1,1)$，　$b=(3,m)$，且 $3a=2b$，则实数 $m=$__________。

2．某细菌在培养过程中，每 20 分钟分裂一次（一个分裂为两个），经过 3 个小时，这种细菌由 1 个可以繁殖成 ______________个。

3．与 60° 终边相同的角的集合是 _______________。

4．若 $f(x)=(x-a)^2+1$ 在$(-\infty,3)$上是减函数，则 a 与 3 的大小关系是_______________。

三、解答题(本大题3小题，共40分，请把答案写在相应的位置上，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

$a_3a_7=-12,a_4+a_6=-4$

1．已知等差数列$\{a_n\}$满足,求数列$\{a_n\}$的通项公式。（10 分）

2．已知二次函数的图像的顶点是（2，3），且经过点（3，1），求这个函数。（10 分）

3．已知 AB 垂直平面 α 于点 B，BC 为斜线 AC 在 α 内的射影，$CD\subseteq\alpha$，设 $\angle ACD=45°$，$\angle BCD=60°$，求 AC 与平面 α 所成的角。（20 分）

模拟题二

一、单选题（把答案写在表格中，8小题，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	分数
答案									

1．集合 $A=\{-1，0，1，2，5\}$，$B=\{0,1，3\}$，则 $A\cup B=$（　　）。

A．{0,1，3}　　B．{0,1}　　C．{−1，0,1，2，3，5}　　D．{0,1，5}

2．满足条件 $\{1，2\}\subseteq M\subseteq\{1，2，3，4\}$ 的集合 M 的个数为（　　）个。

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

3．函数 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|-1}$ 是（　　）。

A．φ　　B．R　　C．（−1，1）　　D．（−∞，−1）U（1,+∞）

4．若函数 $f(x)=x^n$ 的图像过点（3，27），则 $f(-1)=$（　　）。

A．−1　　B．1　　C．2　　D．0

5．若 sinα　=　　,cosα　=　　,则 α 的终边在（　　）。

A．第一象限　　B．第二象限 C．第三象限　　D．第四象限

6．已知是 $|a|=2,|b|=3$，$<a,b>=$　　,则 $a.b=$（　　）。

A．6　　B、3　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$6\sqrt{3}$

7．过点 A（0，2）、B（2，0）的直线的斜率为（　　）。

A．−1　　B．−2　　C．1　　D．2

8．圆的方程是 $(x+2)^2+(y-4)^2=25$，则圆心坐标和半径分别是（　　）。

A．（2，4），5　　B．（2，4），25　　C．（−2，4），5　　D．（−2，−4），25

二、填空题 (每题5分，共20分)

1．已知点 $A(-1,8)$，$B(2，4)$，则 $|AB|=$__________。

2．直线 $3x-4y+4=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 的位置关系是__________。

3．已知斜线段长是它在平面上的射影长的 2 倍，则斜线和平面所成的角是________。

4．在 20 件产品中有 5 件次品，其余都是合格品，从中任取 2 件，2 件都是合格品的概率为________________。

三、解答题(本大题3小题，共40分，请把答案写在相应的位置上，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1．若一个三角形的三内角成等差数列，且最小的内角为 20°,求最大内角的度数。（10 分）

2．已知正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 的长是 9CM，全面积是 $144CM^2$，求此四棱柱的底面周长及体积。（10 分）

3．市内电话是这样规定的，每打一次电话不超过 3 分钟付电话费 0.20 元，以后每分钟 0.10 元（不足 3 分钟按 3 分钟计，以后不足 1 分钟按 1 分钟计）。（1）画出一次通话在 6 分钟内（包括 6 分钟）的通话费 y 关于通话时间 t 的图像；（2）如果一次通话时间 t 分钟

（$t>0$），写出通话费 y 关于通话时间 t（分钟）的函数解析式；（3）如果需要通话时间较长，可以采用分若干次拨打的方法，某人通话 91 分钟，计算这个人用最省钱的拨打方法比用一次拨打的方法少花多少钱。（20 分）

模拟题三

一、单选题（把答案写在表格中，8小题，共40分）。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	分数
答案									

1．下列关系式中正确的是（　　　）。

A．$\{0\}\in 0,1,2\}$　　B．$1\in\{1,2\}$　　C．$\varnothing\subseteq\{0\}$　　D．$0=\varnothing$

2．下列各选项中，正确的是（　　　）。

A．$ab>bc\Rightarrow a>c$　　B．$a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

C．$ac^2>bc^2 \Rightarrow a>b$　　D．$a>b,c>d\Leftrightarrow ac>bd$

3．不等式组$\begin{cases}2x-1<3\\3x+2>5\end{cases}$的解集是（　　　）。

A．$\{x|x<2\}$　　B．$\{x|x>1\}$　　C．$\{x|x<1或x>2\}$　　D．$\{x|1<x<2\}$

4．若函数$y=\sin x-1$的最小值是（　　　）。

A．-2　　B．0　　C．-1　　D．1

5．异面直线a,b所成的角一定是（　　）。

A．锐角　　B．锐角或直角　　C．直角　　D．钝角

6．若奇函数在（$-\infty$，0）是减函数，则 $f(\pi)$与 $f(3)$的大小关系是（　　　）。

A．$f(\pi)>f(3)$　　B．$f(\pi)<f(3)$　　C．$f(\pi)=f(3)$　　D．不能确定

7．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{2}{n^2+n}$，那么$\dfrac{1}{10}$是它的第（　　　）项。

A．4　　B．5　　C．5　　D．7

8．圆 $x^2+y^2-10\text{y}=0$ 圆心到直线 $3x+4y-5=0$ 的距离等于（　　　）。

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{5}{7}$　　C．3　　D．15

二、填空题（每题5分，共20分）

1．已知点 $\vec{B}(3,-2),\overrightarrow{AB}=$（$-2$,4），则点 A 的坐标是____________。

2．某种产品平均每 3 年降低价格$\dfrac{1}{4}$，目前售价 640 元，9 年后此产品价格为________元。

3．过点$(-1,0)$且垂直于直线$x+2y-1=0$的直线的方程是________________。

4．函数$f(x)=\sqrt{x^2+x-6}+\dfrac{1}{x-3}$的定义域是________________。

三、解答题(本大题3小题，共40分，请把答案写在相应的位置上,解答时应写出文字说明。证明过程或演算步骤。)

1. 已知全集$U=\{x\mid x\leqslant 4\}$，集合$A=\{x\mid -2<x<3\}$,集合$B=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$,求（1）$A\cap B$、

（2）$(C_U A)\cup B$、（3）$A\cap C_U B$、（4）$(C_U A)\cup(C_U B)$（10 分）

2．已知 $f(x)$为二次函数，且 $f(0)=-5, f(-1)=-4, f(2)=5$，这个函数。（10 分）

3．张明计划贷款购买一部家用汽车，贷款 15 万元，贷款期为 5 年，年利率为 5%，（1）如果 5 年后一次性还款，应偿还银行多少钱？（2）若按照每年为一期等额本息还款（每期以相同的额度平均偿还本息），那么每年需还银行多少钱？（3）哪种还款方式节省钱，可省多少？（保留两位小数），（20 分）

模拟题四

一、选择题（把答案写在表格中，15小题，共45分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	分数
答案									

1．满足 $A\subseteq\{2,3\}$ 的集合 A 共有（　　）。

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

2．已知角α的终边经过点（$\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$），则 tana 的值为（　　）。

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\sqrt{2}$

3．在△ABC 中，$\overrightarrow{BC}=a$，$\overrightarrow{CA}=b$，则 $\overrightarrow{BA}$ =(　　)。

A．$a+b$　　B．$-(a+b)$　　C．$a-b$　　D．$b-a$

4．若$\log_3 a=2$,则 a 的值为（　　）。

A．$\sqrt{3}$　　B．6　　C．8　　D．9

5．圆$(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 的圆心到直线 $x=2$ 的距离等于（　　）。

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．四位同学和一老师排成一排照相，老师必须排在中间的排法有（　）种。

A．24种　　B．120种　　C．5种　　D．4种

7．当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$和 $y=(1-a)x$ 的图像只可能是图 3-1 中的（　　）图。

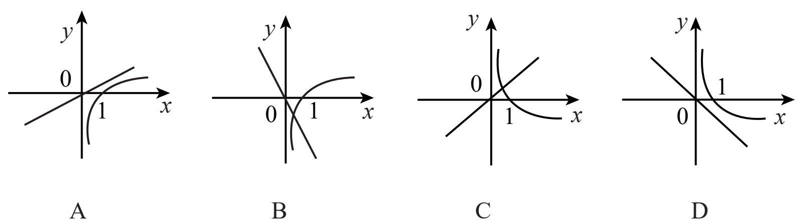


图 3-1

8．直线 x−y+1=0 的倾斜角等于（　　）。

A．-45°　　B．45°　　C．-135°　　D．135°

9．用区间表示集合$\{x|-2<x<3\}$ (　　)。

A．$[-2,3]$　　B．$(-2,3)$　　C．$(-2,3]$　　D．$[-2,3)$

10．如果直线 $ax+2y+2=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 垂直，那么 $a=$（　　）。

A．-3　　B．-6　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

11．x 为自然数是 x 为整数的______________（　　）。

A．充分条件　　B．必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

12．不等式$\frac{2x-1}{2-x}\geqslant 0$的解集是（　　）。

A．$\left\{x \mid \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$　B．$\left\{x \mid \frac{1}{2}\leqslant x<2\right\}$　C．$\left\{x \mid x\leqslant\frac{1}{2}或x>2\right\}$　D．$\{x \mid x<2\}$

13．当 $x\in$（0，$+\infty$）时，下列函数中是增函数的是（　）。

A．$y=x+1$　B．$y=-2x+1$　C．$y=\frac{1}{x}$　D．$y=-x^2$

14．函数$f(x)=\frac{1}{x-3}$的定义域为（　）。

A．$\{x=3\}$　B．$\{x\neq3\}$　C．$\{x>3\}$　D．$\{x<3\}$

15．设全集 $S=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,5\}$,则 $C_SA=$（　　）。

A．{1，3，4}　B．{2，3，4}　C．{2，4}　D．{1，4，5}

二、填空题（每小题3分，共15分）

1．函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域是________。

2．函数 $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$，$f(4)=$______，$f(0)=$_______，$f(1)=$_______ 。

3．集合 $S=\{1,2,4,5,6,7,8\}$，$A=\{4,5,6,8\}$,$B=\{3,5,7,8\}$，则 $A\cup B=$ ___ $A\cap B=$ ___ $C_SA=$ ___。

4．不等式$|x|-2<0$ 的解集是___________________。

5．数列 1,4,9,16,25⋯的一个通项公式为___________。

三、解答题(本大题3小题，共40分，请把答案写在相应的位置上，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1．解不等式：$\frac{x-1}{x+2}>0$（6 分）

2．判断下列函数的奇偶性：（6 分）

（1）$f(x)=x^3$　　(2) $f(x)=x^2+1$

3．证明函数 $f(x)=2x+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数。（8 分）

4．已知$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_5=11$，$a_8=5$，求 a_n，S_n。（10 分）

5．如图 3-2 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：

（1）A_1C_1∥平面 B_1AC；（2）$D_1B\perp$平面 B_1AC。（10 分）

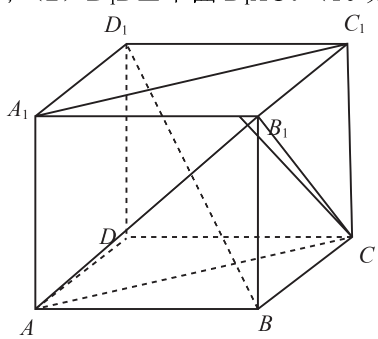


图 3-2

模拟题五

一、单选题（把答案写在表格中，8小题，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	分数
答案									

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$， $B=\{2,4,6\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数是(　　　)。

A．0 个　　　B． 1 个　　　C．2 个

2．函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域是(　　　)。

A．$[0,+\infty)$　　　B．$[1,+\infty)$　　　C．$(-\infty,0]$　　　D．（+∞，－1]

3．若关于 x 的不等式 $mx-2>0$ 的解集是 $\{x|x>2\}$，则实数 m 等于　(　　　)。

A．－1　　　B．－2　　　C．1　　　D．2

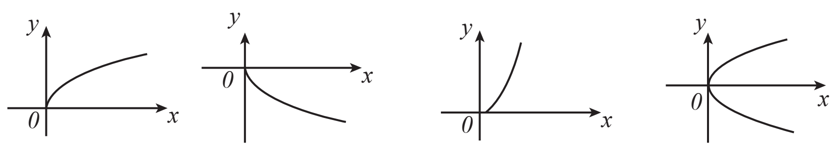
4．若函数 $f(x)=(x+1)(x-a)$ 是偶函数，则实数 1 的值为(　　　)。

A．1　　　B．0　　　C．−1　　　D．±1

5．（−∞，1]圆 $(x-1)^2+y^2=3$ 的圆心坐标和半径分别是(　　　)。

A．$(-1,0),3$　　　B．$(1,0),3$　　　C．$(-1,0),\sqrt{3}$　　　D．$(1,0),\sqrt{3}$

6．函数 $y=\sqrt{x}$ 的图像可能是图 3-3 中的(　　　)。



A.　　　B.　　　C.　　　D.

图 3-3

7．与角 $-\dfrac{\pi}{6}$ 终边相同的角是(　　　)。

A．$\dfrac{5\pi}{6}$　　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　　C．$\dfrac{11\pi}{6}$　　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

8．已知向量 a＝(1，x)，b＝(－1，x)，若 $2a-b$ 与 b 垂直，则$|a|$＝(　　)。

A．$\sqrt{2}$　　　B．$\sqrt{3}$　　　C．2　　　D．4

二、填空题（每题5分，共20分）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 2\\ 3x-2, x>2\end{cases}$，则 $f(3)$的值为_________。

2．已知平面向量 $a=(2,3)$，$b=(1,m)$，且 $a/\!/b$，则实数 m 的值为_________。

3．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_5=16$，则 $a_3=$____________。

4．若球 O 的体积为 $36\pi\text{cm}^3$，则它的半径等于_________cm。

三、解答题(本大题共3小题，共40分，请把答案写在相应的位置上，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

1．已知集合 $A=\left(-1,2\right]$， $B=\left[0,4\right]$，求 $A\bigcap B$ 和 $A\bigcup B$ 。(10 分)

2．已知二次函数的图像的顶点是（2，3），且经过点（3，1），求这个函数。(10 分)

3．如图 3-4 所示,已知长方体的棱 $AB=1$, $BC=2$, $AA_1=\sqrt{3}$,求 A_1B 与 C_1D 所成的角的度数。(20 分)

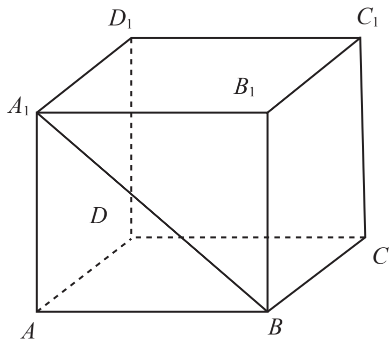


图 3-4